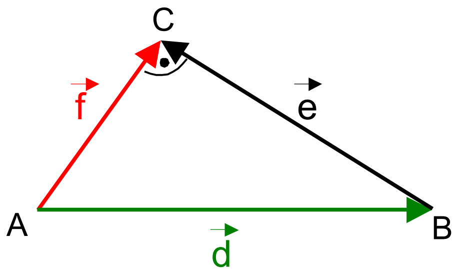
Analytische Geometrie

1. In einem kartesischen Koordinatensystem bestimmen die Punkte A(0|-4|3), B(1|4|-2) und C(-2|4|1) die Ebene E.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC einen rechten Winkel besitzt und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

A (0/-4/3) B (1/4/-2) C (-2/4/1)



$\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 4+4 \\ -2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\vec{e} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 4-4 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{f} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 4+4 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$

rechter Winkel:
Überlegung: 90° Winkel entweder zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ oder $\vec{b}$ und $\vec{c}$ oder $\vec{c}$ und $\vec{a}$
Formel:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|} \qquad \text{wenn} \quad \cos \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 90°$$

Bruch ist 0, wenn Zähler 0 ist $\Rightarrow$ $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$

einsetzen: $\vec{b} \circ \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = -6 + 0 + 6 = 0$ => rechter Winkel bei Punkt C

Flächeninhalt:

$A = ½ * |\vec{b} \times \vec{c}|$

$$A = ½ * \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = ½ * \left| \begin{pmatrix} 0+24 \\ -(-6-6) \\ 24-0 \end{pmatrix} \right| = ½ * \left| \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix} \right| = ½ * \sqrt{24^2 + 12^2 + 24^2} = ½ * 36 = 18 \text{ FE}$$

oder: A= ½ * g * h auch möglich, da hier ein rechtwinkliges Dreieck vorliegt

 © Christiane Deeg

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der durch die Punkte A, B und C bestimmten Ebene E in Normalenform. [mögliches Ergebnis: E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2 = 0$]

Gleichung der Ebene:

$$\overrightarrow{AC} \text{ x } \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ x } \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24+0 \\ -(-6-6) \\ 24-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$; eingesetzt: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0$

E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2 = 0 \quad / : 2$

E: $x_1 + \frac{1}{2} x_2 + x_3 - 1 = 0$

2. Die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ bestimmen die Ebene E (Nachweis nicht erforderlich).Zusätzlich ist die Ebene $H: x_1 + x_2 = 0$ gegeben.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 - 6 = 0$]

Gleichung der Ebene: $\vec{u} \text{ x } \vec{v} = \vec{n}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ x } \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+2 \\ -(-2-0) \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \; ; \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 0 \quad \Rightarrow$ E: $-2x_1 + 2x_2 - x_3 + 6 = 0 \quad / *(-1)$
E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 - 6 = 0$

b) Bestimmen Sie die Koordinaten a, b und c so, dass die Punkte A(a|0|0), B(0|b|0) und C(0|0|c) die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen sind.

Schnittpunkt mit der x_1 - Achse: A(a/0/0)
$2x_1 - 2*0 + 3*0 - 6 = 0 \Rightarrow 2x_1 - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$ A(3/0/0)

Schnittpunkt mit der x_2 - Achse: B(0/b/0)
$-2x_2 - 6 = 0 \Rightarrow x_2 = -3$ B(0/-3/0)

Schnittpunkt mit der x_3 - Achse: C(0/0/c)
$x_3 - 6 = 0 \Rightarrow x_3 = 6$ C(0/0/6)

3. Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte
   $A(-10|5|-10),\ B(0|0|0),\ C(6|17|10),\ D(-8|19|-5)$.
   Durch das Viereck ABCD ist eine Ebene E bestimmt.

a) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform an.
   [mögliches Ergebnis: $E: 11x_1 + 2x_2 - 10x_3 = 0$]

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -8 \\ 19 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Gleichung der Ebene:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0+10 \\ 0-5 \\ 0+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \quad => \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6+10 \\ 17-5 \\ 10+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} \quad => \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \text{ x } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-6 \\ -(10-8) \\ 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} \quad => \vec{n} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$E: 11x_1 + 2x_2 - 10x_3 = 0$

b) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, die die Ebene E im Punkt A senkrecht schneidet.

Gleichung der Geraden:

$\vec{u} \text{ x } \vec{v} = \vec{n}$ siehe 3.a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$

Aufhängepunkt: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

c) Zeigen Sie, dass der Punkt $S(-21|3|0)$ auf der Geraden g liegt.

S (-21/3/0) in g einsetzen:

$$\begin{pmatrix} -21 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -21+10 \\ 3-5 \\ 0+10 \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix} \Rightarrow \delta = -1 \\ \Rightarrow \delta = -1 \\ \Rightarrow \delta = -1 \end{matrix}\right\} \; S \; \varepsilon \; g$$

4. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(5|3|-4)$, $B(6|-1|4)$ und $D(-2|7|0)$ gegeben. Die Punkte A, B und D legen eine Ebene E fest.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: $E: 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 27 = 0$]

A (5/3/-4) B (6/-1/4) D (-2/7/0)

Gleichung der Ebene:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-5 \\ -1-3 \\ 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2-5 \\ 7-3 \\ 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \text{ x } \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ x } \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 \\ -60 \\ -24 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right) = 0$$

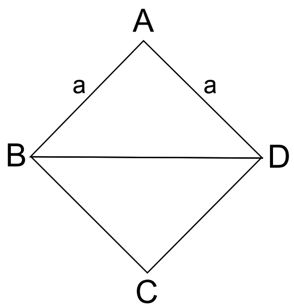
$E: 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 27 = 0$

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABD gleichschenklig, aber nicht gleichseitig ist.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+16+64} = \sqrt{81} = 9 \\ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{49+16+16} = \sqrt{81} = 9 \end{array}\right\} \text{gleichschenklig, da } \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right|$$

$$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -2-6 \\ 7+1 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{64+64+16} = \sqrt{144} = 12 \Big\} \text{ nicht gleichseitig}$$

c) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts C so, dass das Viereck ABCD eine Raute bildet, und berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunkts M.
[Teilergebnis: M (2|3|2)]



$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{C } (-1/3/8)$$

$$\vec{m} = \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 6-2 \\ -1+7 \\ 4+0 \end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{M } (2/3/2)$$