

## §12. Winkel

### 1. Wiederholung

Der *Zwischenwinkel*  $\varphi$  zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  errechnet sich nach der Formel:

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{a \cdot b}} \quad \text{mit } a = |\vec{a}| \text{ und } b = |\vec{b}| \text{ (vgl. §05)}$$

Setzt man die Richtungsvektoren zweier Geraden in diese Formel ein, so erhält man den Schnittwinkel der beiden Geraden. Dabei ist zu beachten, dass man immer denjenigen Winkel verwendet der zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  liegt, also für den der cos größer oder gleich Null ist:

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{|\vec{u}_1 \circ \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}} \quad \text{mit } u_1 = |\vec{u}_1| \text{ und } u_2 = |\vec{u}_2|$$

Mit der NF einer Ebene können nun auch Zwischenwinkel zweier Ebenen oder einer Ebene/Gerade bestimmt werden.

### 2. Winkel zwischen zwei Ebenen E und F

$$E: \vec{n}_1 \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \text{ (NF)}$$

$$F: \vec{n}_2 \circ (\vec{x} - \vec{b}) = 0 \text{ (NF)}$$

Der Zwischenwinkel von E und F ist so groß wie der Zwischenwinkel der beiden Normalenvektoren  $\vec{n}_1$  und  $\vec{n}_2$

Also setzt man diese in die Formel ein und erhält für den *Zwischenwinkel*  $\varphi$  zweier Ebenen:

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}} \quad \text{mit } n_1 = |\vec{n}_1| \text{ und } n_2 = |\vec{n}_2|$$

### 3. Winkel zwischen einer Gerade g und einer Ebene E

$$E: \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \text{ (NF)}$$

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$$

Verwendet man den Normalenvektor  $\vec{n}$  der Ebene und den Richtungsvektor  $\vec{u}$  der Gerade, so stellt man fest dass der Winkel  $\varphi^*$  zwischen diesen **n i c h t** der Winkel zwischen Ebene und Gerade ist. Der gesuchte Winkel  $\varphi$  und  $\varphi^*$  ergänzen sich jedoch zu  $90^\circ$ .

Also gilt:  $\varphi^* = 90^\circ - \varphi$ .

Außerdem ist  $\cos \varphi^* = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi$

und man kann somit den Winkel  $\varphi$  zwischen Gerade und Ebene mit folgender Formel bestimmen:

$$\boxed{\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \circ \vec{u}|}{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}} \quad \text{mit } n = |\vec{n}| \text{ und } u = |\vec{u}|$$