1. Aufgabe

Begründen Sie, ob durch die jeweils gegebenen Punkte und Geraden eine Ebene festgelegt werden kann und bestimmen Sie in diesem Fall eine Normalengleichung dieser Ebene.

a) α) : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 3-2 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-2 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} => & 0 = 0 \\ => & \lambda = -0{,}5 \\ => & \lambda = -0{,}5 \end{matrix}$

Die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ *und* $\overrightarrow{AB}$ sind linear abhängig. A,B und C liegen auf einer Geraden. Somit lässt sich keine Ebene festlegen.

β) $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2-4 \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} => & \lambda = 0 \\ => & \lambda = -1 \\ => & \lambda = 4 \end{matrix}$

Der RV der Gerade und $\overrightarrow{AP}$ sind linear unabhängig. Somit lässt sich eine Ebene festlegen.

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ E: $-5x_1 + 2x_2 + x_3 - 2 = 0$

b) α) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Die Vektoren sind linear unabhängig. Somit lässt sich eine Ebene festlegen.

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ E: $x_1 - 2x_2 + 3 = 0$

β) Der Punkt P(2|2|1) und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} => \lambda = 3 \\ => 0 = 0 (w) \\ => \lambda = 3 \end{matrix}$

Der RV der Gerade und $\overrightarrow{AP}$ sind linear abhängig. Somit lässt sich keine Ebene festlegen.

2. Aufgabe

a) Flächeninhalt: A = 0,5*a*b

A(x) = 0,5(5–x)x = –0,5x² + 2,5x

A‘(x) = –x + 2,5

A‘(x) = 0 => x = 2,5

A‘‘(x) = –1 < 0 Maximum

b) Abstand: $|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} t-2 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(t-2)^2 + t^2 + 4} = \sqrt{t^2 - 4t + 4 + t^2 + 4} = \sqrt{2t^2 - 4t + 8}$

Abstand wird minimal, wenn der Radikant minimal wird:

$r(t) = 2t^2 - 4t + 8$

$r'(t) = 4t - 4$

$r'(t) = 0$ => $t = 1$

$r''(t) = 4 > 0$ Minimum

c) Abstand: $|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ t-2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1 + (t-2)^2 + 4} = \sqrt{1 + t^2 - 4t + 4 + 4} = \sqrt{t^2 - 4t + 9}$

Abstand wird minimal, wenn der Radikant minimal wird:

$r(t) = t^2 - 4t + 9$

$r'(t) = 2t - 4$

$r'(t) = 0$ => $t = 2$

$r''(t) = 2 > 0$ Minimum

Es werden noch weitere Lösungen auf diesem Blatt folgen.