§ 17. Weitere Anwendungen

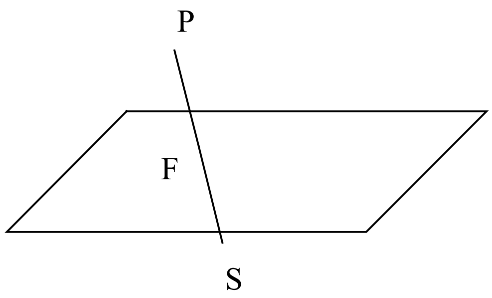
1. Achsenabschnittsform:

Bringt man die NF $ax_1 + bx_2 + c\,x_3 - d = 0$ durch Division durch d auf die Form:
$ex_1 + fx_2 + g\,x_3 = 1$
so hat man die Achsenabschnittsform (AAF). Die SP der Ebene mit den Achsen sind hier leicht abzulesen:
SP mit x_1-Achse: $A_1(e/0/0)$
SP mit x_2-Achse: $A_2(0/f/0)$
SP mit x_3-Achse: $A_3(0/0/g)$

Beispiel:
$x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 2 = 0$ (NF)
$0{,}5x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1$ (AAF)

2. Lotfuß- und Spiegelpunkt

Gegeben ist die HNF einer Ebene mit Normaleneinheitsvektor $\overrightarrow{n°}$ und ein Punkt P außerhalb der Ebene. Der gerichtete Abstand von P zu E sei d (d = $\overrightarrow{n°}(\vec{p} - \vec{a})$)Von P wird auf E das Lot gefällt:



Der Lotfußpunkt F errechnet sich aus: $\vec{f} = \vec{p} - d\overrightarrow{n^o}$
Der Spiegelpunkt S, der bei Spiegelung von P an E entsteht, errechnet sich aus: $\vec{f} = \vec{p} - 2d\overrightarrow{n^o}$

Beispiel:

E: $\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}x_3 - \frac{14}{\sqrt{5}} = 0$ (HNF) P(4/2/1)

d = $\frac{8}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{14}{\sqrt{5}} = -\frac{5}{\sqrt{5}}$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

Lotfußpunkt: $\vec{f} = \vec{p} - d\overrightarrow{n^o} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{10}{5} \\ 0 \\ \frac{5}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ F (6/2/2)

Spiegelpunkt: $\vec{s} = \vec{p} - 2d\overrightarrow{n^o} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{10}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{20}{5} \\ 0 \\ \frac{10}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ S (8/2/3)

3. Geometrische Figuren in der Vektorrechnung

Parallelogramm: Gegenüberliegende Seitenvektoren haben dieselbe Richtung und denselben Betrag

Rechteck: Parallelogramm, aber ein Eckwinkel ist 90°

Quadrat: Alle Seiten gleichlang, ein rechter Winkel

Rechteck, 2 nebeneinanderliegende Seiten gleichlang

Dreieck: Punkte liegen nicht auf einer Geraden (lineare Unabhängigkeit zweier Seitenvektoren)

4. Formeln aus der FS und ihre Bedeutung

- Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC

  $\vec{s} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

- Flächeninhalt eines Parallelogramms/Dreiecks, das von den Vektoren $\vec{a};\vec{b}$ erzeugt wird:

  $A_P = |\vec{a} \times \vec{b}|$ bzw. $A_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

- Volumen eines Spats, der von den Vektoren $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ erzeugt wird:

  V = $\det(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$

- Volumen einer Pyramide, die von den Vektoren $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ erzeugt wird:

  V = $\frac{1}{3}\det(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$

Beispiel:

Die Punkte A(1/2/3), B(4/5/3), C (1/1/3) bilden ein Dreieck. Der Punkt D (5/4/8) bildet die Spitze eines Tetraeders, dessen Grundfläche das Dreieck ABC ist. Bestimme den Schwerpunkt S des Dreiecks, berechne den Flächeninhalt des Dreiecks und das Volumen des Tetraeders.