$f(x) = \ln\frac{x-3}{2x}$

1. a) **Definitionsmenge**

Zur Bestimmung der Definitionsmenge (Skript Kurvendiskussion Punkt 1.) muss man den Term auf die drei Ausnahmen überprüfen: Hier *Logarithmus* und *Bruch*

① $\frac{x-3}{2x} > 0$ Logarithmus: Argument größer als Null.

$(x - 3 > 0 \wedge 2x > 0) \vee (x - 3 < 0 \wedge 2x < 0)$ Bruch ist größer Null, wenn Zähler und Nenner dasselbe VZ haben.

$(x > 3 \wedge x > 0) \vee (x < 3 \wedge x < 0)$

$D_1 =]3; \infty[$ $D_2 =]-\infty; 0[$

② $2x = 0$ Bruch: Nenner Null setzen (Definitionslücken)

Hier aber nicht nötig, da bereits in ① verarbeitet

Damit: $D_f = \mathbb{R} \setminus [0; 3]$

b) **Grenzen des Definitionsbereichs** → Skript Kurvendiskussion Punkt 4

An der Definitionsmenge erkennt man, dass es 4 Grenzen gibt: $-\infty$; 0^-, 3^+ und $+\infty$

① $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\frac{x-3}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\frac{1-\frac{3}{x}}{2} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

② $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \ln\frac{x-3}{2x} = +\infty$ Nenner gegen 0^-, Zähler negativ => Argument gegen $+\infty$

$+ \quad +$

② $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+} \ln\frac{x-3}{2x} = -\infty$ Zähler gegen 0^+, Nenner positiv => Argument gegen 0^+

④ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\frac{x-3}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\frac{1-\frac{3}{x}}{2} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$ (Nenner gegen $-\infty$)

Asymptoten:

vertikale Asymptoten: $x = 0$

$x = 3$

horizontale Asymptote: $y = -\ln 2 \approx -0{,}69$

b) **Nullstellen:**

Bed.: $f(x) = 0$

$\ln\frac{x-3}{2x} = 0 \Rightarrow \frac{x-3}{2x} = 1 \Rightarrow x - 3 = 2x \Rightarrow$

Nullstelle: $x = -3$

1. Ableitung

$$f'(x) = \frac{2x}{x-3} \cdot \frac{2x \cdot 1 - 2 \cdot (x-3)}{(2x)^2} =$$ Kettenregel: 1/Argument wird zu Kehrbruch des Arguments

Nachdiffernzieren des Arguments: Quotientenregel anwenden

$$= \frac{2x - 2x + 6}{(x-3) \cdot 2x} = \frac{3}{(x-3) \cdot x}$$ kürzen von (2x), zusammenfassen und kürzen von 2

Monotonie und Extrempunkte Skript Kurvendiskussion Punkt 7

Bedingung: f'(x) = 0 => 3 = 0 keine Extrema

Vorzeichentabelle für f'(x):

(Als x-Werte: Nullstellen der 1. Ableitung und Ränder von D_f: 0; 3)

0 3

3	+	+	+
x – 3	–	–	+
x	–	+	+
f'(x)	+	–	+

Damit gilt: f ist streng monoton zunehmend für x ∈] –∞; 0[
f ist streng monoton zunehmend für x ∈]3; ∞ [

c) **2. Ableitung**

$$f'(x) = \frac{3}{(x-3)x} = \frac{3}{x^2 - 3x}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 3x) \cdot 0 - (2x-3) \cdot 3}{(x^2 - 3x)} =$$ z.B. Quotientenregel anwenden

$$= \frac{-6x + 9}{(x^2 - 3x)^2} = \frac{-6x + 9}{x^2(x-3)^2}$$

Krümmung und Wendepunkte Skript Kurvendiskussion Punkt 8

Bedingung: f''(x) = 0 => –6x + 9 = 0 => (x = 1,5 ∉ D) kein Wendepunkt vorhanden

Vorzeichentabelle für f''(x):

(Als x-Werte: Nullstellen der 2. Ableitung und Ränder von D_f: 0; ;1,5;3)

0 1,5 3

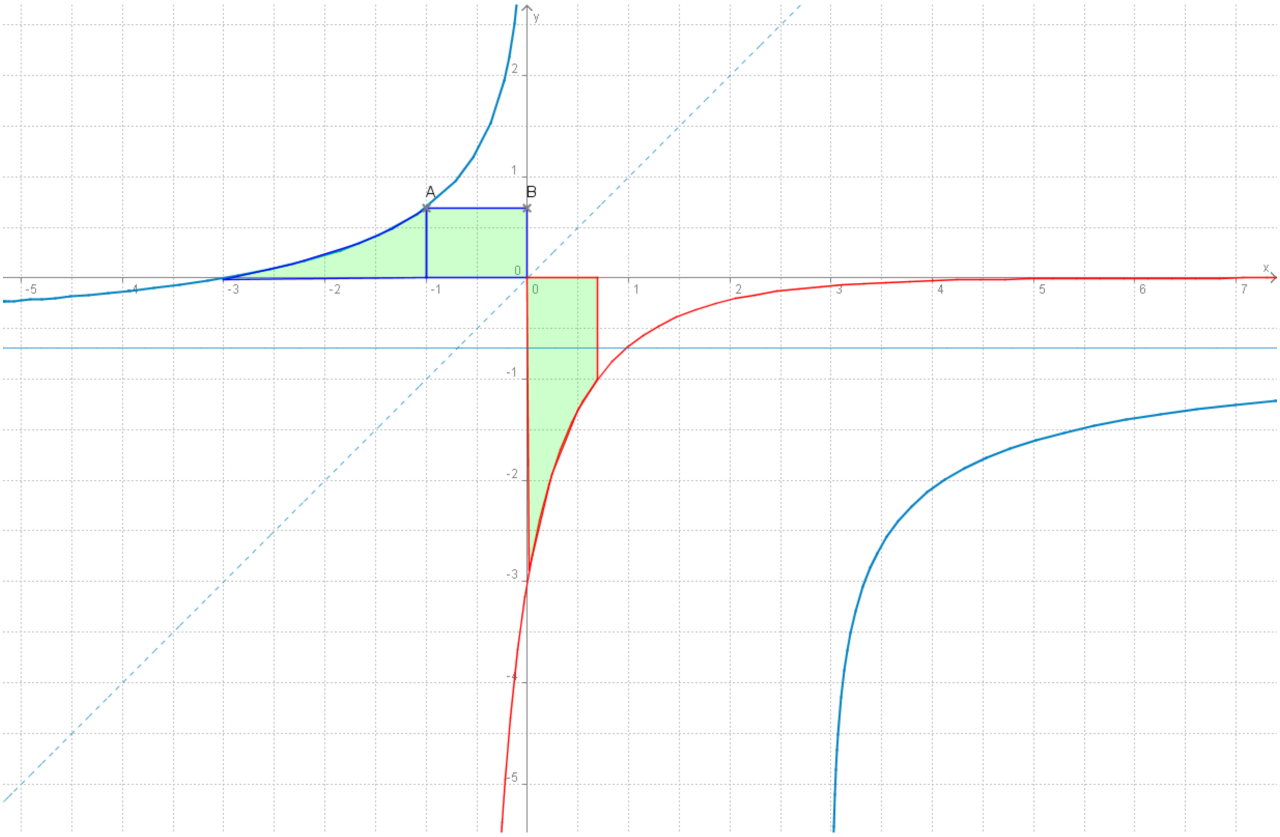
– 6x + 9	+	+	–	–
X²	+	+	+	+
(x – 3)²	+	+	+	+
F''(x)	+	+	–	–

Damit gilt: f ist linksgekrümmt für x ∈] –∞; 0[
f ist rechtsgekrümmt für x ∈]3; ∞ [

e) $f(-5) \approx -0{,}22$

$f(-1) \approx 0{,}69$

$f(7) \approx -1{,}25$



2. a) F(x)= $x \cdot \ln \frac{x-3}{2x} - 3\ln(3-x)$

$$F'(x) = x \cdot \frac{3}{(x-3)x} + 1 \cdot \ln\frac{x-3}{2x} - 3 \cdot \frac{1}{3-x} \cdot (-1) =$$ Produktregel anwenden, Ableitung aus 1.c)

$$= \frac{3}{x-3} - \frac{3}{x-3} + \ln\frac{x-3}{2x} = \ln\frac{x-3}{2x} = f(x)$$

F ist Stammfunktion von f.

b) Definitionsmenge von g entspricht der Wertemenge von f im angegebenen Bereich. Aus dem graphen erkennt man $W_f =]-\ln 2; \infty[$.
Also: $D_g = \ ]-\ln 2; \infty[$.

c) Die gesuchte Fläche ergibt sich aus dem Funktionsgraphen (vgl. 1. e)), eingeschlossen vom Graph von f, den Achsen und der Gerade mit der Gleichung y = ln2.
Sie setzt sich aus 2 Teilen zusammen:
① Fläche unter dem Graphen von der Nullstelle x = –3 bis x_o
② Rechtecksfläche von x_o bis x = 0 (Höhe: h = ln2; Länge: $l = 0 - x_o = -x_o$)

Bestimmung von x_0:
Im Punkt A schneidet der Graph von f die Gerade mit y = ln2. Gleichsetzen:
f(x) = ln2

$$\ln\frac{x-3}{2x} = \ln 2 \;\|\; e^{\cdots}$$

$$\frac{x-3}{2x} = 2 \;\|\; e^{\cdots}$$

x – 3 = 4x
3x = –3
x = –1 Rechteck: $A_R = -x_o \cdot h = 1 \cdot \ln 2 = \ln 2$

Berechnung der Fläche:

$$A = \int_{-3}^{-1} f(x)dx + A_R = \left[x \cdot \ln\frac{x-3}{x} - 3\ln(3-x)\right]_{-3}^{-1} + A_R =$$

$$= \left[-1 \cdot \ln\frac{-1-3}{-1} - 3\ln(3+1)\right] - \left[-3 \cdot \ln\frac{-3-3}{-3} - 3\ln(3+3)\right] + A_R =$$

$$= \left[-1 \cdot \ln(2 \cdot 2) - 3\ln(2 \cdot 2)\right] - \left[-3 \cdot \ln 2 - 3\ln(2 \cdot 3)\right] + A_R =$$

$$= -\ln 2 - \ln 2 - 3\ln 2 - 3\ln 2 + 3 \cdot \ln 2 + 3\ln 2 + 3\ln 3 + \ln 2$$

$$= 3\ln 3 - \ln 2 \approx \underline{\underline{2{,}603}}$$