

Gegeben ist für $a \neq 0$ die Schar der Funktionen

$$f_a : x \mapsto x + \frac{x+a}{x}$$

mit maximaler Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der zu f_a gehörige Graph wird mit G_a bezeichnet.

1. a) Bestimmen Sie die Nullstellen und ihre Anzahl in Abhängigkeit von a .
Untersuchen Sie – gegebenenfalls mittels Fallunterscheidung – das Verhalten von f_a an den Rändern des Definitionsbereichs und geben Sie die Art der Definitionslücken an. 7
 - b) Zeigen Sie, dass die Graphen G_a eine gemeinsame schräge Asymptote g haben und geben Sie eine Gleichung von g an. 3
 - c) Weisen Sie die Gültigkeit folgender Beziehung nach:
 $f_a(x) - 1 = 1 - f_a(-x)$
Welche Symmetrieeigenschaft des Graphen ist damit nachgewiesen? 5
 - d) Für welche Werte von a hat G_a zwei Extrempunkte? Bestimmen Sie Lage und Art eines jeden Extrempunkts. 8
 - e) Berechnen Sie $f_1(1)$, $f_1(4)$ und zeichnen Sie G_1 und G_{-2} sowie die Asymptote g aus Teilaufgabe 1.b) im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ (Längeneinheit 1 cm). 7
2. a) Bestimmen Sie den Term einer Stammfunktion F_a für f_a .
[Zwischenergebnis: Für $x > 0$ gilt: $F_a(x) = \frac{(x+1)^2}{2} + a \ln x$] 3
 - b) Die Graphen G_1 , G_{-2} und die Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = k$ ($k > 1$) schließen im 1. Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie k so, dass der Inhalt dieses Flächenstücks 3 ist. 7

40