

$$f_a(x) = x + \frac{x+a}{x} = \frac{x^2+x+a}{x} = x + 1 + \frac{a}{x}$$

(I) (V)

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(Form nach [Gk-Skript §14](#))

1. a) Nullstellen

Zur Bestimmung der Nullstellen ([Skript Kurvendiskussion Punkt 2.](#)) sollte der Term in die Form I (Gk-Skript §14) umgeformt werden.

$$f_a(x) = x + \frac{x+a}{x} = \frac{x^2+x+a}{x}$$

① Bedingung: $f(x) = 0$

Also: $x^2 + x + a = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$$

Zur Bestimmung der Anzahl der Nullstellen geht man nun die Schritte ② bis ④ aus dem [Skript Kurvenscharen](#) durch:

② $1 - 4a \geq 0$

Wurzel: Radikant größer gleich Null

$$4a \leq 1$$

$$a \leq \frac{1}{4}$$

Also: für $a > \frac{1}{4}$ gibt es keine Nullstelle

für $a = \frac{1}{4}$: genau eine Nullstelle $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \cdot \frac{1}{4}}}{2} = -\frac{1}{2}$

für $a > \frac{1}{4}$: 2 Nullstellen $x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$

③ $\frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2} = 0$

$$-1 \pm \sqrt{1-4a} = 0$$

$$\pm \sqrt{1-4a} = 1$$

$$1 - 4a = 1$$

$$a = 0$$

Probe: $x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 0}}{2} = \frac{-1 \pm 1}{2}$ Bei Wurzelgleichungen ist die Probe unerlässlich

$$x_1 = 0; x_2 = -1 \quad (x_2 \in D!)$$

- ④ Damit:
- Keine Nullstelle für $a \in]-\infty; \frac{1}{4}[$
 - Genau eine Nullstelle für $a = 0$: $x = -\frac{1}{2}$
 - für $a = \frac{1}{4}$: $x = -1$
 - Zwei Nullstellen für $a \in]-\infty; \frac{1}{4}[\setminus \{0\}$: $x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$

Grenzverhalten

Man erkennt an der Definitionsmenge, dass 4 Ränder zu untersuchen sind: $-\infty; 0^-; 0^+; +\infty$

- ① Für $a > 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln \frac{x^2 + x + a}{x} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{x^2 + x + a}{x} = +\infty$ ($x = 0$ ist Polstelle 1. Ordnung)
- Für $a < 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln \frac{x^2 + x + a}{x} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{x^2 + x + a}{x} = -\infty$ ($x = 0$ ist Polstelle 1. Ordnung)
- Für $a = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1$ ($x = 0$ ist stetig behebbar; Loch: L(0/0))

- ② Für das Verhalten für $x \rightarrow \infty$ sollte der Funktionsterm in die Form V ([Gk-Skript §14](#)) umgeformt werden.

$f_a(x) = x + 1 + \frac{a}{x}$ Division eines jeden Zählersummanden durch den Nenner x

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 + \frac{a}{x}) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1 + \frac{a}{x}) = -\infty$

- b) **Grenzen des Definitionsbereichs** → [Skript Kurvendiskussion Punkt 4](#)
 Aus dem Funktionsterm der Form V (aus 1.a) erkennt man die Asymptote.

$f_a(x) = x + 1 + \frac{a}{x}$

Der gebrochene Anteil $\frac{a}{x}$ geht für jedes a für $x \rightarrow \infty$ gegen Null. Damit ist $y = x + 1$ die Gleichung der gemeinsamen schrägen Asymptote g .

c) **Nachweis der Beziehung**

$$f_a(x) - 1 = 1 - f_a(-x)$$

Linke Seite: $f_a(x) - 1 = x + 1 + \frac{a}{x} - 1 = x + \frac{a}{x}$

Rechte Seite: $1 - f_a(-x) - 1 = 1 - (-x + 1 - \frac{a}{x}) - 1 = 1 + x - 1 + \frac{a}{x} = x + \frac{a}{x}$

l.S. = r.S.

Symmetrieeigenschaft

Die Graphen sind **punktsymmetrisch** zum Punkt **P(0/1)**

d) Lösungsmöglichkeit ① (Nur mit 1. Ableitung)

1. Ableitung (Quotientenregel aus FormI) – Faktorisieren!!!

$$f'(x) = \frac{x \cdot (2x + 1) - 1 \cdot (x^2 + x + a)}{x^2} = \frac{2x^2 + x - x^2 - x - a}{x^2} = \frac{x^2 - a}{x} = \frac{(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})}{x}$$

Extrempunkte: Skript Kurvendiskussion Punkt 8

Bedingung: $f'_a(x) = 0 \Rightarrow (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{a}$ nur für $a > 0$

y-Koordinaten: Skript Kurvendiskussion Punkt 5

$$y_1 = f_a(\sqrt{a}) = \frac{a + \sqrt{a} + a}{\sqrt{a}} = \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{a} + 1$$

$$y_2 = f_a(-\sqrt{a}) = \frac{a - \sqrt{a} + a}{\sqrt{a}} = \frac{2a - \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{a} - 1$$

Vorzeichentabelle für $f'(x)$:

(Als x-Werte: Nullstellen der 1. Ableitung und Ränder von D_f : $-\sqrt{a}$; 0 ; \sqrt{a})

		$-\sqrt{a}$	0	\sqrt{a}	
x^2	+			+	+
$x - \sqrt{a}$	-			+	+
$x + \sqrt{a}$	-			+	+
$f'(x)$	+			+	+

MAX

MIN

Also: Hochpunkt **H**($-\sqrt{a}$ | $2\sqrt{a} - 1$)

Tiefpunkt **T**(\sqrt{a} | $2\sqrt{a} + 1$)

Lösungsmöglichkeit ② (Auch mit 2. Ableitung) Skript Kurvendiskussion Punkt 10

1. Ableitung (Aus Form V) – auf einen Bruchstrich und faktorisieren!!!

$$f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} = \frac{x^2 - a}{x} = \frac{(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})}{x}$$

2. Ableitung (Aus Form V) – auf einen Bruchstrich und faktorisieren!!!

$$f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} \Rightarrow f''(x) = 2 \cdot \frac{a}{x^3}$$

Extrempunkte: Koordinaten wie in Lösungsmöglichkeit ①

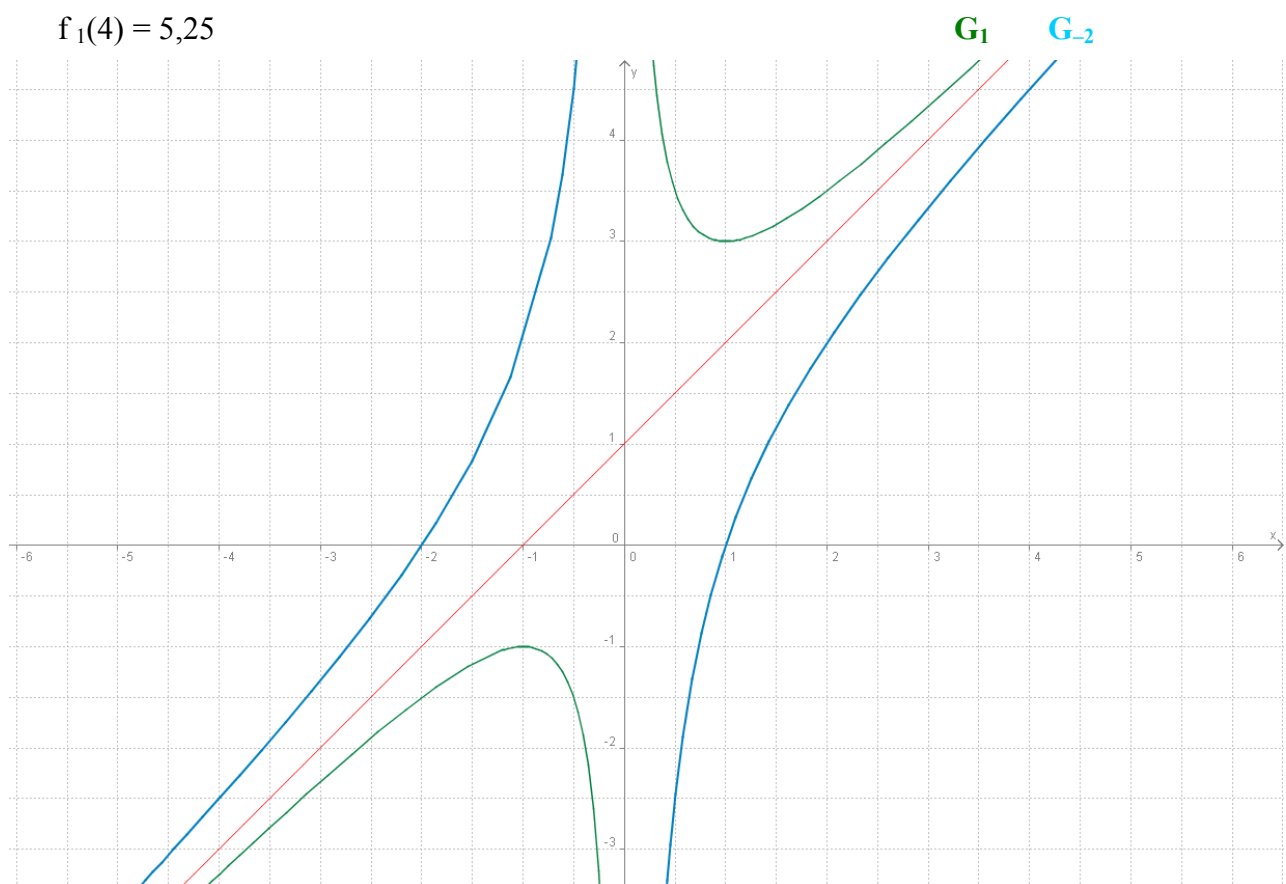
Lage: $x_{1/2} = \pm \sqrt{a}$ nur für $a > 0$; $y_1 = 2\sqrt{a} + 1$; $y_2 = 2\sqrt{a} - 1$

Art: $f_a''(+\sqrt{a}) = f_a''(-\sqrt{a}) = 2 \frac{a}{(\sqrt{a})^3} > 0 \Rightarrow$ **Tiefpunkt** $T(\sqrt{a} \mid 2\sqrt{a} + 1)$

$f_a''(+\sqrt{a}) = f_a''(-\sqrt{a}) = 2 \frac{a}{(-\sqrt{a})^3} = \frac{2a}{-\sqrt{a}^3} < 0 \Rightarrow$ **Hochpunkt** $H(-\sqrt{a} \mid 2\sqrt{a} - 1)$

e) $f_1(1) = 3$

$f_1(4) = 5,25$



2. a) Zur Integration die Form V ([Gk-Skript §14](#)) verwenden

$$F(x) = \int \left(x + 1 + \frac{a}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} + x + a \ln|x| + C = \frac{x^2 + 2x + 2C}{2} + a \ln|x|$$

$$\text{mit } C = 1 \text{ ergibt sich: } F(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{2} + a \ln|x| = \frac{(x+1)^2}{2} + a \ln|x|$$

- c) Die gesuchte Fläche ergibt sich aus dem Funktionsgraphen (vgl. 1. e)) als Fläche zwischen 2 Funktionsgraphen ([Gk-Skript §06](#)) im Bereich von $x = 1$ bis $x = k$. Man sieht außerdem, dass sich die beiden Graphen in diesem Bereich nicht schneiden und dass G_1 über G_2 liegt..

Differenzfunktion d:

$$d(x) = f_1(x) - f_2(x) = \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right) - \left(x + 1 - \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{3}{x}$$

Berechnung von k:

Bedingung: $A = 3$

$$\int_1^k d(x) dx = 3$$

$$\int_1^k \frac{3}{x} dx = 3$$

$$[3 \ln |x|]_1^k = 3$$

$$3 \ln k - 3 \ln 1 = 3 \quad \text{Beachte: } \ln 1 = 0$$

$$3 \ln k = 3$$

$$\ln k = 1 \quad || e^{\dots}$$

$$k = e$$