Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x}{2}\left[1+(\ln x)^2\right]$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}^+$.
Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.
Hinweis: Im Folgenden darf der Grenzwert $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} [x\,(\ln x)^n] = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ ohne Beweis verwendet werden.

1. a) Zeigen Sie, dass $f'(x) = \frac{1}{2}(1+\ln x)^2$ ist, und folgern Sie daraus ohne Verwendung der zweiten Ableitung, dass G_f keinen Extrempunkt besitzt. 6

   b) Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten von G_f und weisen Sie nach, dass G_f genau einen Terrassenpunkt besitzt. Berechnen Sie dessen Koordinaten. 5

   c) Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ und $f'(x)$ für $x \overset{>}{\to} 0$ und für $x \to +\infty$. Geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an. 5

   d) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.
   [zur Kontrolle: $(e^{-1}|e^{-1})$, $(e|e)$] 4

2. Berechnen Sie $f(1{,}5)$ sowie $f(4)$ und zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $0 < x \leq 4$ (Längeneinheit 2 cm). 6

3. a) Weisen Sie nach, dass $F: x \mapsto \frac{x^2}{8}[2(\ln x)^2 - 2\ln x + 3]$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion von f ist. 3

   b) Berechnen Sie für $0 < u < e^{-1}$ den Inhalt der Gesamtfläche A(u), die im Bereich $u \leq x \leq e$ zwischen G_f und der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten liegt. Berechnen Sie $\lim\limits_{u \to 0} A(u)$. 7

4. Die Funktion f ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich). Der Graph der Umkehrfunktion von f wird mit $G_{f^{-1}}$ bezeichnet.
   Geben Sie ohne Berechnung des Terms der Umkehrfunktion den Winkel an, unter dem G_f und $G_{f^{-1}}$ sich im Punkt $(e^{-1}|e^{-1})$ schneiden, und begründen Sie Ihr Ergebnis anschaulich. 4

40

Thema: Infintesimalrechnung