$f(x) = \frac{x}{2}\left[1 + (\ln x)^2\right]$ $D_f = IR^+$

1. a) **Ableitung**

$f'(x) = \frac{x}{2} \cdot \left[2(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\right] + \frac{1}{2} \cdot \left[1 + (\ln x)^2\right] =$ Produktregel anwenden, lnx nachdifferenzieren

$= \frac{x}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{x}(\ln x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\ln x)^2 =$ ausmultiplizieren

$= (\ln x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\ln x)^2$ kürzen

$= \frac{1}{2}\left[2(\ln x) + 1 + (\ln x)^2\right] =$ ½ ausklammern

$= \frac{1}{2}\left[1 + (\ln x)\right]^2$ binomische Formel

Extrempunkte Skript Kurvendiskussion Punkt 7

Bedingungen: ① $f'(x) = 0$ => $1 + \ln x = 0$ => $x = e^{-1}$ vgl. 1.b)

② an der Nullstelle muss ein VZW von f' vorliegen.

Es gilt: $f'(x) = \frac{1}{2}\left[1 + (\ln x)\right]^2 \geq 0$

Damit liegt zwar eine Nullstelle von f' vor, aber kein VZW. Somit hat G_f keine Extrempunkte.

b) **2. Ableitung** (Krümmungsverhalten Wendepunkt: Skript Kurvendiskussion Punkt 8)

$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\left[1 + (\ln x)\right] \cdot \frac{1}{x} =$ Faktor ½ als multiplikative Konstante stehen lassen,

Produktregel anwenden, lnx nachdifferenzieren

$= \frac{1 + \ln x}{x}$ kürzen, alles auf einen Bruchstrich

Terrassenpunkt: Skript Kurvendiskussion Punkt 9

Bedingungen: ① $f'(x_o) = 0$; ② $f''(x_o) = 0$ und ③ VZW von $f''(x)$

Also (Bed.②): $\frac{1 + \ln x}{x} = 0$

$1 + \ln x = 0$ Bruch ist Null, wenn sein Zähler Null ist

$\ln x = -1 \quad |e^{\cdots}$

$x_o = e^{-1} \approx 0{,}368$

$y_o = f(e^{-1}) = \frac{e^{-1}}{2}\left[1 + (\ln e^{-1})^2\right] =$ x-Wert in Funktionsterm (!) einsetzen

Skript Kurvendiskussion Punkt 5

$= \frac{1}{2e}\left[1 + (-1)^2\right] = \frac{e^{-1}}{2} \cdot 2 = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Vorzeichentabelle für f ''(x):

	0 … e^{-1}	e^{-1} …
1 + lnx	–	+
x	+	+
f ''(x)	–	+

Damit gilt: G_f ist rechtsgekrümmt für $x \in\ ]0; e^{-1}]$
G_f ist linksgekrümmt für $x \in\ [e^{-1}; \infty[$ Bed.③ erfüllt

Wendepunkt: $W(e^{-1}/ e^{-1})$.

Da hier auch f'(x) eine Nullstelle hat, liegt hier eine waagrechte Tangente vor (Bed. ① ist erfüllt) und W ist somit Terrassenpunkt.

c) **Grenzwerte** Skript Kurvendiskussion Punkt 4

① $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{2}\left[1+(\ln x)^2\right] = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\underbrace{\frac{x}{2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{x}{2}(\ln x)^2}_{\to 0}\right] = 0$

② $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} = \frac{1}{2}\left[1+(\ln x)\right]^2 = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\underbrace{\frac{1}{2}}_{\to ½} + \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} + \underbrace{(\ln x)^2}_{\to +\infty}\right] = +\infty$

③ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\underbrace{\frac{x}{2}}_{\to -\infty} + \underbrace{\frac{x}{2}(\ln x)^2}_{\to +\infty}\right] = \infty$

④ $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\underbrace{\frac{1}{2}}_{\to ½} + \underbrace{\ln x}_{\to \infty} + \underbrace{(\ln x)^2}_{\to +\infty}\right] = +\infty$

Wertemenge

Da $f'(x) \geq 0$, ist die Funktion streng monoton zunehmend in D, also ergibt sich die Wertemenge aus den Grenzwerten von f, wenn x an die Ränder des Definitionsbereichs strebt. (① und ③): $W_f = IR^+$

d) Gleichung der Winkelhalbierenden: y = x
Bedingung: f(x) = x

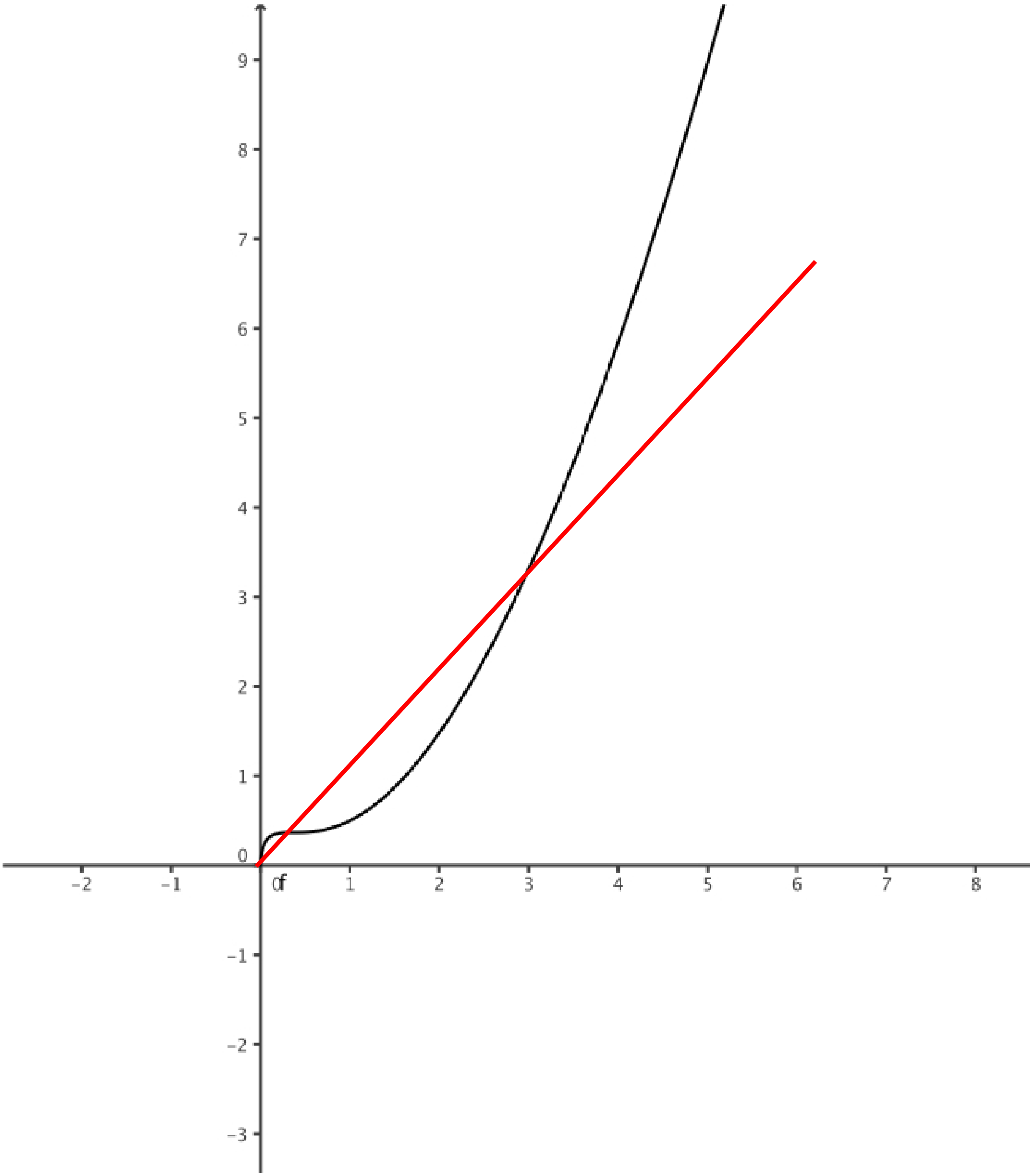
$$\frac{x}{2}\left[1+(\ln x)^2\right] = x$$
$$\frac{1}{2}\left[1+(\ln x)^2\right] = 1$$
$$1+(\ln x)^2 = 2$$
$$(\ln x)^2 = 1$$

Beachte: 2 Lösungen beim Wurzelziehen!

$$\ln x = \pm 1$$

$x_1 = e^{-1}$ $y_1 = e^{-1}$ $S_1(e^{-1}/e^{-1})$ x–Werte in y = x einsetzen
$x_2 = e$ $y_2 = e$ $S_2(e/e)$

2. $f(1{,}5) \approx 0{,}873$
   $f(4) \approx 5{,}84$



3. a) $F(x)=\frac{x^2}{8}[2(\ln x)^2-2\ln x+3]$

$F'(x)=\frac{x^2}{8}\cdot\left[2\cdot 2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}-2\cdot\frac{1}{x}\right]+2\cdot\frac{x}{8}\cdot\left[2(\ln x)^2-2\ln x+3\right]=$ Produktregel anwenden,

lnx nachdifferenzieren

$=\frac{x^2}{8}\cdot 4(\ln x)\cdot\frac{1}{x}-\frac{x^2}{8}\cdot\frac{2}{x}+\frac{x}{4}\cdot 2(\ln x)^2-\frac{x}{4}\cdot 2\ln x+\frac{x}{4}\cdot 3=$ Klammern auflösen

$=\frac{x}{2}(\ln x)-\frac{x}{4}+\frac{x}{2}(\ln x)^2-\frac{x}{2}\ln x+\frac{3}{4}\mathrm{x}=$ kürzen

$=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}(\ln x)^2=\frac{x}{2}\left[1+(\ln x)^2\right]=f(x)$ vereinfachen, ausklammern

F ist Stammfunktion von f.

b) Gesucht ist die Fläche zwischen 2 Funktionsgraphen (Skript §06). Man muss also die Schnittstellen der beiden Graphen (Gf und Winkelhalbierende) bestimmen und „von Schnittstelle zu Schnittstelle“ integrieren. Die Schnittstellen sind nach Teilaufgabe 1.d) e^{-1} und e.

$$A(u)=\left|\int_u^{e^{-1}}(f(x)-x)dx\right|+\left|\int_{e^{-1}}^{e}(f(x)-x)dx\right|=\int_u^{e^{-1}}(f(x)-x)dx+\int_{e^{-1}}^{e}(x-f(x))dx=$$

Positive Werte werden erreicht, wen man den Term des oberen Funktionsgraphen Minus den des unteren Funktionsgraphen berechnet.

$$=\left[\frac{x^2}{8}[2(\ln x)^2-2\ln x+3]-\frac{x^2}{2}\right]_u^{e^{-1}}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{8}[2(\ln x)^2-2\ln x+3]\right]_{e^{-1}}^{e}=$$

Stammfuktion von f von 3.a) übernehmen,
Stammfunktion von g(x) = x bestimmen: G(x) = x²/2

$$=\left(\frac{e^{-2}}{8}[2(\ln e^{-1})^2-2\ln e^{-1}+3]-\frac{e^{-2}}{2}\right)-\left(\frac{u^2}{8}[2(\ln u)^2-2\ln u+3]-\frac{u^2}{2}\right)+$$

$$\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{8}[2(\ln e)^2-2\ln e+3]\right)-\left(\frac{e^{-2}}{2}-\frac{e^{-2}}{8}[2(\ln e^{-1})^2-2\ln e^{-1}+3]\right)=$$

$$=\left(\frac{7}{8}e^{-2}-\frac{1}{2}e^{-2}\right)-\left(\frac{u^2}{8}[2(\ln u)^2-2\ln u+3-4]\right)+\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{3}{8}e^2\right)-\left(\frac{1}{2}e^{-2}-\frac{7}{8}e^{-2}\right)=$$

$$=\frac{3}{8}e^{-2}-\left(\frac{u^2}{4}(\ln u)^2-\frac{u^2}{4}\ln u-\frac{u^2}{8}\right)+\frac{1}{8}e^2+\frac{3}{8}e^{-2}=$$

$$=\frac{3}{4}e^{-2}+\frac{1}{8}e^2-\left(\frac{u^2}{4}(\ln u)^2-\frac{u^2}{4}\ln u-\frac{u^2}{8}\right)$$

$$\lim_{u\to 0^+}A(u)=\lim_{u\to 0^+}\left[\frac{3}{4}e^{-2}+\frac{1}{8}e^2-\left(\frac{u^2}{4}(\ln u)^2-\frac{u^2}{4}\ln u-\frac{u^2}{8}\right)\right]=\frac{3}{4}e^{-2}+\frac{1}{8}e^2=\frac{3}{4e^2}+\frac{1}{8}e^2\approx 1{,}025$$

4. Der Punkt $(e^{-1}|e^{-1})$ ist Terassenpunkt von G_f und hat damit eine waagrechte Tangente, die mit der Winkelhalbierenden einen Winkel von 45° einschließt. Da der Graph der Umkehrfunktion durch Spiegeln von G_f an der Winkelhalbierenden entsteht, schneidet G_{f-1} die Winkelhalbierende auch unter einem Winkel von 45°. *Somit stehen beide Graphen aufeinander senkrecht.*