Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{x(1-\ln x)}$ mit maximalem Definitionsbereich D_f. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1. a) Bestimmen Sie D_f und ermitteln Sie das Verhalten von f an den Grenzen des Definitionsbereichs.
(Hinweis: $\lim\limits_{x \to 0^+}(x \cdot \ln x) = 0$ darf ohne Beweis verwendet werden.) 7

   b) Zeigen Sie, dass in D_f gilt: $f'(x) = [f(x)]^2 \cdot \ln x$
Ermitteln Sie damit das Monotonieverhalten der Funktion f.
Bestimmen Sie ohne Verwendung der zweiten Ableitung die Lage und Art des Extrempunkts von G_f. 7

Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion $h: x \mapsto \frac{2}{x}$ mit $D_h = \mathbb{R}^+$. Ihr Graph wird mit G_h bezeichnet.

2. a) In welchem Punkt $S(x_s|y_s)$ schneiden sich G_f und G_h? Berechnen Sie die Steigung der Tangenten an G_f und G_h im Punkt S. Ermitteln Sie daraus den Schnittwinkel dieser beiden Tangenten (auf Grad genau).
[zur Kontrolle: $x_s = \sqrt{e}$] 8

   b) Fertigen Sie eine Zeichnung der Graphen G_f und G_h im Bereich $0 < x < 6$ (Längeneinheit 2 cm) unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse. 7

3. a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \mapsto -\ln(1 - \ln x)$ für $0 < x < e$ eine Stammfunktion von f ist. 3

   b) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das die Graphen von f und h sowie die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ einschließen.
Um wie viel Prozent weicht dieser ab vom Inhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten $(1|2)$, $(1|1)$ und S (vgl. Teilaufgabe 2a)? 8

40