$f: x \mapsto \frac{1}{x(1-ln\,x)}$

1. a) **Definitionsmenge**

Zur Bestimmung der Definitionsmenge (Skript Kurvendiskussion Punkt 1.) muss man den Term auf die drei Ausnahmen überprüfen: Hier *Logarithmus* und *Bruch*

① $x > 0$	Logarithmus: Argument größer als Null.
② $x(1 - \ln x) = 0$	Bruch: Zähler Null setzen (Definitionslücken)
$x_1 = 0$	Produkt mit 2 Faktoren: Jeden Faktor Null setzen
$1 - \ln x = 0$	
$\ln x = 1$	
$x_2 = e$	$x_1 = 0$ und $x_2 = e$ sind die Definitionslücken. Mit ① ergibt sich:
$D_f = IR^+ \setminus \{e\}$	in IR^+ ist 0 nicht enthalten, also nur die Zahl e ausschließen

Grenzen des Definitionsbereichs → Skript Kurvendiskussion Punkt 4

An der Definitionsmenge erkennt man, dass es 4 Grenzen gibt: 0^+, e^-, e^+ und $+\infty$

① $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\underset{+}{x}(\underset{+}{1-\ln x})} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\underset{\to 0}{x} - \underset{\to 0}{x \ln x}} = +\infty$ (Nenner gegen Null, VZ-Betrachtung)

② $\lim\limits_{x \to e^-} f(x) = \lim\limits_{x \to e^-} \frac{1}{\underset{+}{x}(\underset{+}{1-\ln x})} = +\infty$ (Nenner gegen Null, VZ-Betrachtung)

③ $\lim\limits_{x \to e^+} f(x) = \lim\limits_{x \to e^+} \frac{1}{\underset{+}{x}(\underset{-}{1-\ln x})} = -\infty$ (Nenner gegen Null, VZ-Betrachtung)

④ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x(1-\ln x)} = 0$ (Nenner gegen $-\infty$)

Asymptoten (in der Aufgabe nicht gefragt):

vertikale Asymptoten: $x = 0$
$x = e$

horizontale Asymptote: $y = 0$

b) **Ableitung**

Alternative ①: *Quotientenregel* (Beachte Faktor mal Null gleich Null!!)

$$f'(x) = \frac{x(1-\ln x)\cdot 0 - [x\cdot(-\frac{1}{x}) + 1\cdot(1-\ln x)]}{x^2(1-ln\,x)^2} =$$

Quotientenregel anwenden, Produktregel bei der Nennerableitung

$$= \frac{1-1+\ln x}{x^2(1-ln\,x)^2} = \frac{\ln x}{x^2(1-ln\,x)^2} =$$

zusammenfassen

$$= \left[\frac{1}{x(1-ln\,x)}\right]^2 \cdot \ln x = [f(x)]^2 \cdot \ln x$$

gegebene Form herstellen

Alternative ②: *Produktregel* (für den 2. Faktor Kettenregel oder Quotientenregel – hier nicht vorgeführt):

$$f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(1-\ln x)} = x^{-1} \cdot (1-\ln x)^{-1}$$

$$f'(x) = x^{-1} \cdot \left[-(1-\ln x)^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)\right] + (-x^{-2}) \cdot (1-\ln x)^{-1} =$$ Produktregel anwenden,

$$= \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{(1-\ln x)^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) + \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{1-\ln x} =$$ negative Exponenten vermeiden

$$= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{(1-\ln x)^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1-\ln x} =$$ zusammenfassen

$$= \frac{1}{x^2(1-\ln x)^2} - \frac{1-\ln x}{x^2(1-\ln x)^2} =$$ auf Hauptnenner erweitern

$$= \left[\frac{1}{x(1-\ln x)}\right]^2 \cdot \ln x = [f(x)]^2 \cdot \ln x$$ gegebene Form herstellen

Alternative ③: *Kettenregel* (zum Nachdifferenzieren Produktregel):

$$f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)} = [x \cdot (1-\ln x)]^{-1}$$

$$f'(x) = -[x \cdot (1-\ln x)]^{-2} \cdot \left[x \cdot (-\frac{1}{x}) + 1 \cdot (1-\ln x)\right] =$$ Kettenregel anwenden,

$$= -[x \cdot (1-\ln x)]^{-2} \cdot [-1+1-\ln x] =$$ zusammenfassen

$$= \frac{-\ln x}{-[x \cdot (1-\ln x)]^2} =$$ negative Exponenten vermeiden

$$= \left[\frac{1}{x(1-\ln x)}\right]^2 \cdot \ln x = [f(x)]^2 \cdot \ln x$$ gegebene Form herstellen

Monotonie und Extrempunkte Skript Kurvendiskussion Punkt 7

Bedingung: f'(x) = 0 => $[(f(x)]^2 \cdot \ln x = 0$

Grundsätzlich: Beide Faktoren betrachten (hier gilt aber: $[(f(x)]^2 > 0$)

$\ln x = 0$

x = 1 => y = $f(1) = \frac{1}{1(1-\ln 1)} = 1$ Skript Kurvendiskussion Punkt 5

Vorzeichentabelle für f'(x):

(Als x-Werte: Nullstellen der 1. Ableitung und Ränder von D_f: 0; 1; e)

	0	1	e
$[f(x)]^2$	+	+	+
lnx	–	+	+
f'(x)	–	+	+

Damit gilt: f ist streng monoton abnehmend für x ∈]0; 1]
f ist streng monoton zunehmend für x ∈ [1; e[
f ist streng monoton abnehmend für x ∈]e; ∞[Tiefpunkt: T(1/ 1).

2. a) **Schnittpunkt**

Bedingung: f(x) = g(x)

Also: $\frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{2}{x}$ ||· x·(1 – lnx)

$1 = 2\cdot(1-\ln x)$

$1 = 2 - 2\ln x$

$2\ln x = 1$

$\ln x = 0{,}5$

$x = e^{0,5}$

$x = \sqrt{e} \approx 1{,}65$ (x-Wert in f oder g einsetzen; in g ist leichter!)

$y = g(\sqrt{e}) = \frac{2}{\sqrt{e}} \approx 1{,}21$ $S(\sqrt{e}\,|\,\frac{2}{\sqrt{e}})$

Tangentensteigung Skript Kurvendiskussion Punkt 6

Einsetzen der x-Koordinate in die Ableitungen von f und g

$g'(x) = -\frac{2}{x^2}$ $f'(x) = \left[\frac{1}{x(1-\ln x)}\right]^2 \cdot \ln x$

$m_1 = g'(\sqrt{e}) = -\frac{2}{\sqrt{e}^2} = -\frac{2}{e}$

$m_2 = f'(\sqrt{e}) = \left[\frac{1}{\sqrt{e}(1-\ln e^{0,5})}\right]^2 \cdot \ln(e^{0,5}) = \left[\frac{1}{\sqrt{e}(1-0{,}5)}\right]^2 \cdot 0{,}5 = \frac{0{,}5}{0{,}25e} = \frac{2}{e}$

Schnittwinkel

Alternative ①: Formel aus FS (S. 83): $\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$

$$\tan\alpha = \left|\frac{-\frac{2}{e}-\frac{2}{e}}{1-\frac{2}{e}\cdot\frac{2}{e}}\right| = \left|\frac{-\frac{4}{e}}{1-\frac{4}{e^2}}\right| = \left|\frac{-\frac{4}{e}}{\frac{e^2-4}{e^2}}\right| = \left|-\frac{4}{e} : \frac{e^2-4}{e^2}\right| = \left|-\frac{4}{e}\cdot\frac{e^2}{e^2-4}\right| = \frac{4e}{e^2-4}$$

α = 72,688° ≈ 73°

Alternative ②: Neigungswinkel beider Geraden: $\tan\alpha_1 = m_1$ und $\tan\alpha_2 = m_2$

$$\left.\begin{array}{r} \tan\alpha_1 = -\frac{2}{e} \Rightarrow \alpha_1 = -36{,}344° \\ \tan\alpha_2 = \frac{2}{e} \Rightarrow \alpha_2 = 36{,}344° \end{array}\right\} \quad \alpha = |\alpha_1 - \alpha_2| = |36{,}344° + 36{,}344°| = 72{,}688°$$

$\alpha = 73°$

3. a) $F(x) = -\ln(1-\ln x)$

$$F'(x) = -\frac{1}{1-\ln x}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x(1-\ln x)} = f(x)$$

F ist Stammfunktion von f.

.

b) **Fläche**

Gesucht ist die Fläche zwischen 2 Funktionsgraphen (Skript §06). Man muss also die Schnittstellen der beiden Graphen (G_f und G_h) bestimmen und „von Schnittstelle zu Schnittstelle“ integrieren. Die Schnittstelle ist nach Teilaufgabe 2.a) $e^{0,5}$. Untere Grenze des Integrals ist 1. Aus dem Graphen erkennt man, dass in diesem Intervall G_h über G_f liegt.

$$A = \left|\int_1^{e^{0,5}} (f(x) - h(x))dx\right| = \int_1^{e^{0,5}} (h(x) - f(x))dx = \int_1^{e^{0,5}} \left(\frac{2}{x} - f(x)\right)dx =$$

$$= \left[2\cdot\ln x - (-\ln(1-\ln x))\right]_1^{e^{0,5}} = \left[2\ln x + \ln(1-\ln x)\right]_1^{e^{0,5}} =$$

Stammfuktion von f aus 3.a) übernehmen,
Stammfunktion von $h(x) = 2\cdot x^{-1}$ bestimmen

$$= \left[2\ln(e^{0,5}) + \ln(1-\ln(e^{0,5}))\right] - \left[2\ln 1 + \ln(1-\ln 1)\right] =$$

$$= \left[2\cdot 0{,}5 + \ln(1-0{,}5)\right] - \left[0 + \ln 1\right] =$$

$$= 1 + \ln 0{,}5 - 0 = 1 - \ln 2 \approx 0{,}3069$$

Dreiecksfläche

Die Fläche eines Dreiecks errechnet sich nach der Formel $A_\Delta = ½ \cdot g\cdot h$
Grundlinie g ist die Strecke zwischen Den Eckpunkten (1/1) und (1/2), also g = 2 – 1 = 1
Höhe h ist die senkrechte Verbindungslinie von g zu $S(\sqrt{e}\,|\,\frac{2}{\sqrt{e}})$, also $h = \sqrt{e} - 1$

$A_\Delta = ½ \cdot 1\cdot(\sqrt{e} - 1) = 0{,}5\cdot(\sqrt{e} - 1) \approx 0{,}3244$

<u>Abweichung:</u> Differenz: $A - A_\Delta = 0{,}3069 - 0{,}3244 = -0{,}0175$
In Prozent: $-0{,}0175 : A_\Delta = -0{,}0175 : 0{,}3069 = -0{,}054 = -5{,}4\ \%$

A ist um 5,4% kleiner als A_Δ