1. Aufgabe *Integrale*

Berechne die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int 10x^4 dx = 10 \cdot \frac{x^5}{5} + C = 2x^5 + C$

b) $\int \frac{x^2+3x+2}{x^2} dx = \int \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx = x + 3\ln|x| - \frac{2}{x} + C$

c) $\int \frac{6x^2+4}{x^3+2x} dx = 2\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x} dx = 2\ln|x^3+2x| + C$ 9

2. Aufgabe *Fragen* (6 BE)

Jede der folgenden Aussagen ist entweder wahr oder falsch. Kreuzen Sie jeweils an:

		wahr	falsch	
a)	Die Gleichung ln(2x – e) – 1 hat die Lösung x = e	☒	☐	
b)	Gilt für x ∈ D: f'(x) > 0, so folgt f ist streng monoton zunehmend für x ∈ D.	☐	☒	
c)	Jede Stammfunktion hat mindestens eine Nullstelle.	☐	☒	
d)	Jede Integralfunktion hat mindestens eine Nullstelle.	☒	☐	
f)	Die integralfreie Darstellung von F: $x \mapsto \int_1^x \ln t\,dt$ lautet: $F: x \mapsto \frac{1}{x} - 1$	☐	☒	
g)	Besitzen die erste und die zweite Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 jeweils eine Nullstelle, so hat der Graph von f dort sicher keinen Extrempunkt.	☐	☒	6

3. Aufgabe: *Kurvendiskussion*

a) **Definitionsmenge**

Zur Bestimmung der Definitionsmenge (Skript Kurvendiskussion Punkt 1.) muss man den Term auf die drei Ausnahmen überprüfen: Hier *Logarithmus* und *Bruch*

$\frac{4x-2}{2x} > 0$ Logarithmus: Argument größer als Null.

$(4x - 2 > 0 \wedge 2x > 0) \vee (4x - 2 < 0 \wedge 2x < 0)$ Zähler/Nenner mit demselben VZ

$(x > 0{,}5 \wedge x > 0) \vee (x < 2 \wedge x < 0)$

$D_1 =]0{,}5; \infty[$ $D_2 =]-\infty; 0[$

Bruch: Nenner ungleich Null bereits in Ungleichungen enthalten

$D_f = \mathbb{R} \setminus [0; 0{,}5]$

SP mit x-Achse Skript Kurvendiskussion Punkt 2. Skript §09

Bed.: f(x) = 0

$\ln\frac{4x-2}{2x} = 0 \quad \| e^{\cdots}$

$\frac{4x-2}{2x} = 1$

$4x - 2 = 2x$

$x = 1$ N(1/0)

SP mit y-Achse

Kein SP vorhanden, da $0 \notin D$. 7

c) **Grenzen des Definitionsbereichs** → Skript Kurvendiskussion Punkt 4

An der Definitionsmenge erkennt man, dass es 4 Grenzen gibt: $-\infty$; 0^-, $0{,}5^+$ und $+\infty$

① $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{4x-2}{2x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{4-\frac{2}{x}}{2}\right) = \ln 2$

② $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{4x-2}{2x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{4-\frac{2}{x}}{2}\right) = \ln 2$ Horizontale Asymptote: y = ln2

③ $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \ln\left(\frac{4x-2}{2x}\right) = \infty$ Verbotene Rechnung $\ln\infty = \infty$

④ $\lim\limits_{x\to0{,}5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0{,}5^+} \ln\left(\frac{4x-2}{2x}\right) = -\infty$ Verbotene Rechnung $\ln 0^+ = -\infty$

Vertikale Asymptoten: x = 0

x = 0,5 5

c) **Ableitung**

$$f'(x) = \frac{2x}{4x-2} \cdot \frac{2x \cdot 4 - 2(4x-2)}{(2x)^2} =$$

Kettenregel (Kehrbruch des Arguments) und

Quotientenregel beim Nachdifferenzieren

$$= \frac{1}{4x-2} \cdot \frac{8x - 8x + 4}{2x} = \frac{4}{2x(4x-2)}$$

Kürzen und zusammenfassen

Monotonie und Extrempunkte Skript Kurvendiskussion Punkt 7

f'(x) = 0 => 4 = 0 (f) Keine Nullstellen von f' vorhanden

Vorzeichentabelle für f'(x):

(Als x-Werte: Nullstellen der 1. Ableitung und Ränder von D_f: 0; 0,5)

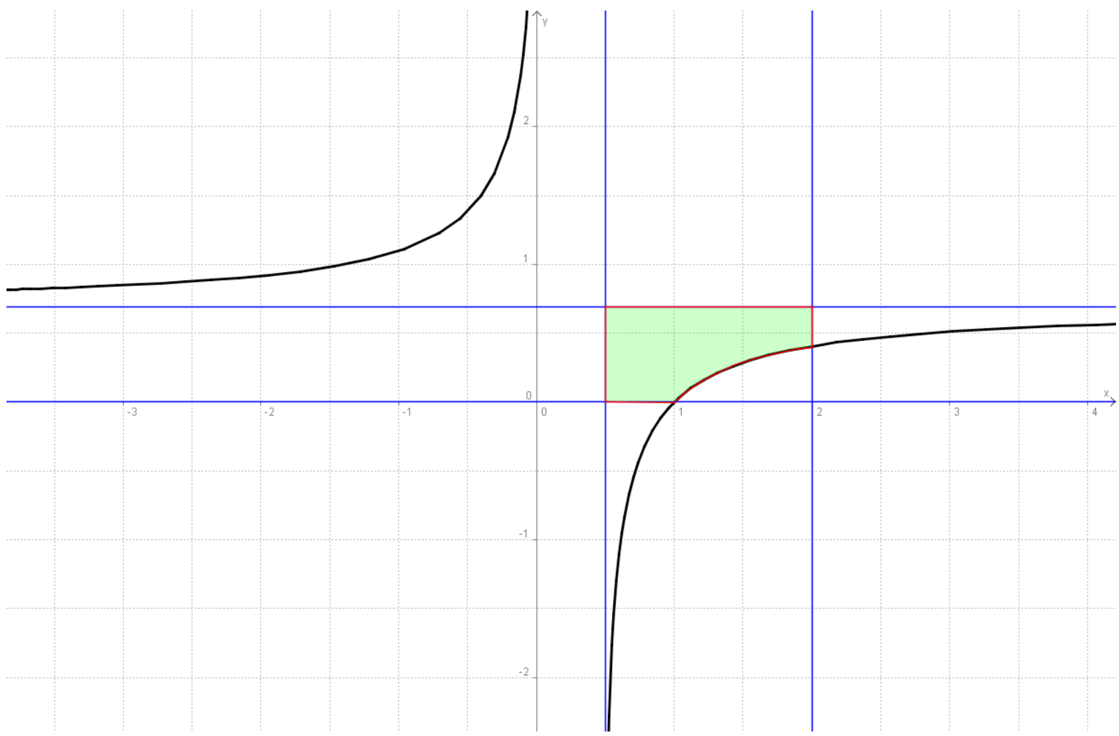
		0 … 0,5	
4	+		+
2x	–		+
4x – 2	–		+
f'(x)	+		+

Damit gilt: f ist streng monoton zunehmend für x ∈]–∞; 0[

f ist streng monoton zunehmend für x ∈]0,5; ∞[9

Keine Extrempunkte vorhanden

d)



4

e) $F(x) = (x - 0,5)\cdot\ln(4x - 2) - x\cdot\ln(2x)$

$F'(x) = (x-0,5)\cdot\frac{1}{4x-2}\cdot 4 + 1\cdot\ln(4x-2) - x\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2 - 1\cdot\ln(2x) =$

Produktregel 2mal anwenden (nachdifferenzieren des Arguments)

$= \frac{4x-2}{4x-2} + 1\cdot\ln(4x-2) - \frac{2x}{2x} - \ln(2x) =$

$= 1 + 1\cdot\ln(4x-2) - 1 - \ln(2x) =$

$= \ln\left(\frac{4x-2}{2x}\right) = f(x)$ 7

F ist Stammfunktion von f.

f) Fläche ist ein Rechteck (Länge von x = 0,5 bis x = 2 und Höhe h = ln2), von dem ein Teil abgeschnitten wurde. (s. Graph)
Fläche errechnet sich aus der Rechtecksfläche $A_1 = 1,5\cdot\ln 2$ abzüglich des Integrals von der Nullstelle x = 1 bis x = 2

$A = A_1 - \int_1^2 f(x) = A_1 - \left[(x-0,5)\cdot\ln(4x-2) - x\cdot\ln(2x)\right]_1^2 =$

$= A_1 - \left[(2-0,5)\cdot\ln(8-2) - 2\cdot\ln(4)\right] + \left[(1-0,5)\cdot\ln(4-2) - 1\cdot\ln(2)\right] =$

$= A_1 - 1,5\cdot\ln 6 + 2\cdot\ln 4 + 0,5\cdot\ln 2 - \ln 2 =$

$= 1,5\cdot\ln 2 - 1,5\cdot\ln 2 - 1,5\cdot\ln 3 + 4\cdot\ln 2 + 0,5\cdot\ln 2 - \ln 2 =$

$= 3,5\ln 2 - 1,5\cdot\ln 3 \approx 0,778$ 6

Σ = 53 BE