I. GRUNDLAGEN

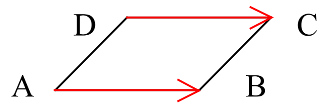
§01. Vektoren

Definition
Die Menge aller gerichteten Strecken im Raum, die
- gleiche Länge,
- gleiche Richtung und
- gleiche Orientierung besitzen,

nennt man *Vektor*. Ein Element dieser Menge heißt *Repräsentant des Vektors*.

Schreibweisen:
- Kleine deutsche Buchstaben: $\mathfrak{a}$; $\mathfrak{b}$; $\mathfrak{c}$; $\mathfrak{d}$; $\mathfrak{e}$; $\mathfrak{f}$; $\mathfrak{o}$; $\mathfrak{u}$; $\mathfrak{v}$; $\mathfrak{w}$; $\mathfrak{x}$
- Kleine lat. Buchstaben mit Pfeil: $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$; $\vec{d}$; $\vec{e}$; $\vec{f}$; $\vec{o}$; $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$; $\vec{x}$
- Als Verbindung zweier Punkte: $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{XA}$;...

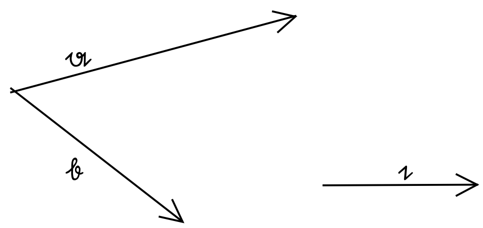
Beispiel:
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{a} = \mathfrak{a}$



Definitionen:

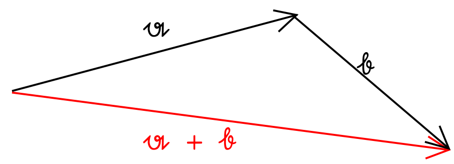
1. Der Vektor, dessen Repräsentanten die Länge 0 haben, heißt Nullvektor $\mathfrak{o}$.
2. Ein Vektor $\mathfrak{a}$ heißt parallel zu einem Vektor $\mathfrak{b}$, wenn die Repräsentanten von $\mathfrak{a}$ zu denen von $\mathfrak{b}$ parallel sind. Zum Nullvektor ist jeder Vektor parallel.
3. Ein Vektor heißt Gegenvektor eines Vektors $\mathfrak{a}$, wenn sich seine Repräsentanten nur in der Orientierung unterscheiden. Er wird mit $-\mathfrak{a}$ bezeichnet.

§02. Vektorketten

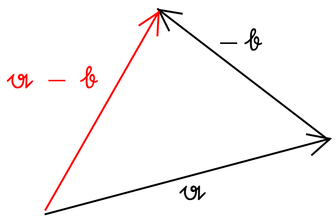


1. Addition von Vektoren:

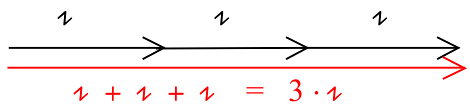
Der Fußpunkt des einen Repräsentanten wird an die Spitze des anderen gesetzt. Der Repräsentant der Summe verläuft vom Fußpunkt des ersten zur Spitze des zweiten Summanden.



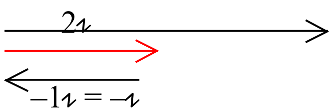
Definition:
Statt $\mathfrak{a} + (-\mathfrak{b})$ schreibt man auch $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$.
Einen Vektor subtrahiert man, indem man seinen Gegenvektor addiert.



2. Multiplikation mit einer reellen Zahl

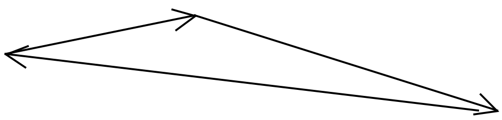


Definition:
Multipliziert man einen Vektor $\mathfrak{a}$ mit einer reellen Zahl $\lambda > 0$, so haben die Repräsentanten $\lambda\mathfrak{a}$ die λ-fache Länge, die gleiche Richtung und Orientierung wie $\mathfrak{a}$.
Der Vektor $-1\mathfrak{a}$ ist der Gegenvektor von $\mathfrak{a}$.



3. geschlossene Vektorketten

Definition:
Eine *geschlosseneVektorkette* ist eine mehrgliedrige Summe mit dem Summenvektor o.



§03. Lineare Abhängigkeit

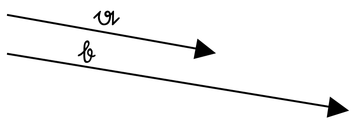
Definition:

Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ heißen *linear unabhängig*, wenn die Gleichung

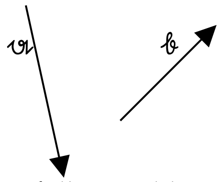
$\lambda_1\mathfrak{a}_1 + \lambda_2\mathfrak{a}_2 + \ldots \lambda_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$

für die λ_i ($i = 1;\ldots;n$) nur die eindeutige Lösung $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 0; \ldots \lambda_n = 0$ besitzt. Ansonsten heißen sie *linear abhängig*.

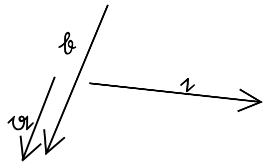
Geometrische Bedeutung:



$\mathfrak{a}; \mathfrak{b}$ lin. abh.
$\mathfrak{a} - 2\mathfrak{b} = 0$



$\mathfrak{a};\mathfrak{b}$ lin. unabh.
$0\mathfrak{a} + 0\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ einzige Mögl.



$\mathfrak{a};\mathfrak{b};\mathfrak{c}$ lin. abhängig
$\mathfrak{a} - 0{,}5\mathfrak{b} + 0\mathfrak{c} = \mathfrak{o}$

Eigenschaften lin. abh. Vektoren:

In der Ebene (IR^2) gibt es maximal 2 linear unabhängige Vektoren, im Raum (IR^3) maximal 3.

Außerdem gilt für n linear abhängige Vektoren:
$\lambda_1\mathfrak{a}_1 + \lambda_2\mathfrak{a}_2 + \ldots \lambda_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$
Sei $\lambda_1 \neq 0$
$\mathfrak{a}_1 + \lambda_2/\lambda_1 \cdot \mathfrak{a}_2 + \ldots \lambda_n/\lambda_1 \cdot \mathfrak{a}_n = o$
$\mathfrak{a}_1 = \mu_2\mathfrak{a}_2 + \ldots \mu_n\mathfrak{a}_n$ (mit $\mu_i = \lambda_i/\lambda_1$)
Linearkombination der Vektoren. $\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_n$

Satz
n Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sich mindestens einer von ihnen durch Linearkombination der restlichen ausdrücken lässt.

Sonderfall (2 linear abhängigeVektoren):
$\lambda_1\mathfrak{a}_1 + \lambda_2\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{o} \mid : \lambda_1 \neq 0$
$\mathfrak{a}_1 = \mu_2\mathfrak{a}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{a}_1 \parallel \mathfrak{a}_2$

Satz
Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie parallel sind

§04. Lineare Gleichungssysteme

1. Systeme mit 2 Variablen (x_1 und x_2)

(1) I. $a x_1 + b x_2 = e$ (Normalform)
II. $c x_1 + d x_2 = f$

Gilt: $e = 0$ und $f = 0$,
so heißt das System *homogenes Gleichungssystem* (GLS), sonst *inhomogenes GLS.*

Lösung:

d·I. $ad\ x_1 + bd\ x_2 = de$
–b·II. $\underline{-bc\ x_1 - bd\ x_2 = -bf}$
$x_1\ (ad - bc) = de - bf$

$x_1 = (de - bf)/(ad - bc)$
Analog ergibt sich
$x_2 = (af - ce)/(ad - bc)$

Definition:

1. Eine Zahlenschema $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ heißt (zweireihige) Matrix.
2. $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ heißt Determinante der Matrix A.

Determinante aus den Koeffizienten des Gleichungssystems: $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Ersetzt man in D die 1. Spalte durch e und f, erhält man: $D_1 = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = ed - bf$

Ersetzt man in D die 2. Spalte durch e und f, erhält man: $D_1 = \begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix} = af - ce$

Damit ergibt sich:

Cramersche Regel:
Das Gleichungssystem (1) besitzt die eindeutige Lösung
$x_1 = D_1/D$ und $x_2 = D_2/D$ (*), bzw. die Lösungsmenge $L = \{(D_1/ D; D_2/D)\}$
falls $D \neq 0$

Andere Schreibweise:
$Dx_1 = D_1 \quad Dx_2 = D_2$ (*)

So ergeben sich 4 Möglichkeiten:

	$D = 0$	$D \neq 0$
$D_1 = 0$ und $D_2 = 0$ (z.B. homog. Gls.)	in (*) $0 = 0$; $0 = 0$ (w) Es gibt ∞ viele Lösungen	$Dx_1 = 0$; $Dx_2 = 0$; $L = \{(0:0)\}$ triviale Nulllösung
$D_1 \neq 0$ oder $D_2 \neq 0$	$0 = D_1$; $0 = D_2$ (f) $L = \{\}$	$L = \{(D_1/D: D_2/D)\}$

Satz:
Ein homogenes Gleichungssystem hat entweder,
- wenn $D \neq 0$, nur die triviale Nulllösung oder
- wenn $D = 0$, unendlich viele Lösungen (inkl. trivialer Nulllösung).

Beispiele:

$x_1 + 2x_2 = 4$
$x_1 + 4x_2 = 2$

$D = 2; D_1 = 12; D_2 = -2$
$x_1 = 6; x_2 = -1$
$L = \{(6;-1)\}$

$x_1 + 2x_2 = 0$
$x_1 + 4x_2 = 0$

$D = 2 \neq 0$
$L = \{(0;0)\}$

2. Systeme mit 3 Variablen (x_1, x_2 und x_3)

(1) I. $a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_2 = d_1$
II. $a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_2 = d_2$
III. $a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_2 = d_3$

Ist $d_1 = 0$, $d_2 = 0$ und $d_3 = 0$ so heißt das System homogenes Gleichungssystem, sonst inhomogenes Gls.

Definition:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - (b_1a_2c_3 + a_1c_2b_3 + c_1b_2a_3) \text{ heißt}$$

dreireihige Determinante der (dreireihigen) Matrix A.

Trick

$$\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} = \ldots$$

Beispiel:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 1 - (2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 0) = 2 - 2 - 3 = -3$$

Satz
Auch bei GLS mit 3 Variablen gilt die Cramersche Regel analog.

§05. Vektorräume

1. Definition und Beispiele

Eine nichtleere Menge K heißt Körper, wenn sie bestimmte Bedingungen erfüllt (FS.S.)

Beispiele:
Q ist ein Körper
$\mathbb{R}$ ist ein Körper
Z ist kein Körper, da 2 kein Inverses bezüglich „·“ besitzt.

Gegeben ist ein Körper K und eine nichtleere Menge V. V heißt *Vektorraum über K*, wenn bestimmte Bedingungen erfüllt sind (vgl. FS S.   )
Die Elemente aus V heißen *Vektoren*, die Elemente aus K *Skalare*.

Beispiele:

① Menge der bisher betrachteten Vektoren

② Menge der Polynome von höchstens Grad 1 ($\vec{a} = a_1x + a_2$)

2. Basis und Dimension

Definition
Eine endliche Menge von Vektoren eines Vektorraums V, die aus linear unabhängigen Vektoren besteht und die V erzeugt*, heißt *Basis von V*.

*Alle Vektoren $\vec{v} \in V$ müssen sich als Linearkombination der Basisvektoren schreiben lassen.

Also sind die Vektoren $a_1; a_2;...;a_n$ genau dann eine Basis, wenn folgende Bed. erfüllt sind:

① $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... \lambda_n\vec{a}_n = \vec{o}$ für $(\lambda_1; \lambda_2; ...; \lambda_n) = (0;0;...;0)$ (lineare Unabhängigkeit)

② $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... \lambda_n\vec{a}_n = \vec{v}$ für jeden Vektor $\vec{v} \in V$. (Komponentendarstellung von $\vec{v}$)

Komponenten von $\vec{v}$ bezüglich der Basis

Definition
Die Anzahl n der Basisvektoren eines Vektorraums V heißt Dimension von V
Schreibweise: dim V = n oder V^n

Beispiel:
Der Vektorraum der Polynome höchstens 2. Grades über $\mathbb{R}$ besitzt die Basis 1; x; x² und somit die Dimension 3. Denn

① die lineare Unabhängigkeit lässt sich folgendermaßen zeigen:
$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 = \vec{o}$
$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 = 0 + 0 + 0$ nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$;

② jedes Polynom höchstens 2. Grades lässt sich als Linearkombination von 1;x und x² darstellen.

§06. Spaltenvektoren

1. Koordinatendarstellung

<u>Satz und Definition:</u>
Die Komponentendarstellung $\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{u}_1 + a_2\mathfrak{u}_2 + a_3\mathfrak{u}_3$ aus §4 ist eindeutig.
Die Zahlen a_1, a_2 und a_3 heißen *Koordinaten des Vektors $\mathfrak{a}$ bezüglich der Basis $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$.*

Man schreibt: $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, falls $\mathfrak{a} \in V^2$ bzw. $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, falls $\mathfrak{a} \in V^3$

<u>Rechenregeln:</u>

① $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

② $\lambda \cdot \mathfrak{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$

③ Nullvektor: $\mathfrak{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>Beispiel:</u>

Berechne $3\mathfrak{a} - 2\mathfrak{b}$ mit

$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

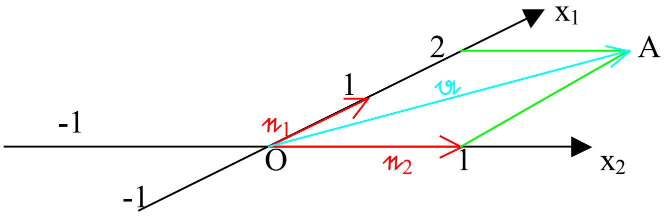
$$3\mathfrak{a} - 2\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \ -0 \\ -6+12 \\ 9 \ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Ortsvektoren

<u>Definition</u>
Die Menge aller Punkte der Ebene bzw. des Raums bezeichnet man als *affinen Punktraum* $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.
Zeichnet man die Basisvektoren $\mathfrak{u}_1$ $\mathfrak{u}_2$ und $\mathfrak{u}_3$, deren Anfangspunkte im Ursprung O liegen ein, so erhält man ein affines Koordinatensystem. Jede Gerade in Richtung der Basisvektoren heißt Koordinatenachse (x_1-, x_2-, x_3- Achse).

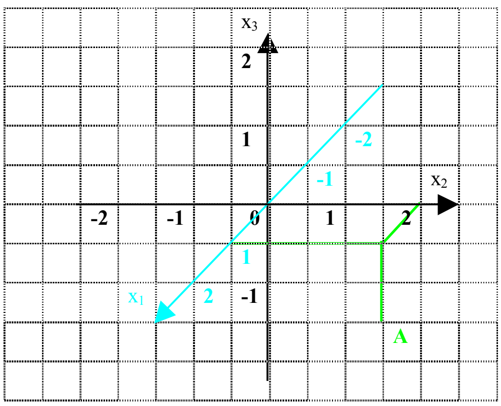
<u>Satz und Definition:</u>
Jedem Vektor $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist so eindeutig ein Punkt $A(a_1|\ a_2|\ a_3)$ mit $\mathfrak{a} = \overrightarrow{OA}$ zugeordnet.
a_1, a_2, a_3 heißen *die Koordinaten von A*.

<u>Beispiele:</u>①



Hier gilt: $\mathfrak{a} = 2 \cdot \mathfrak{u}_1 + 1 \cdot \mathfrak{u}_2$; also: $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $A(2|1)$

② <u>Standardbasis:</u> (Basisvektoren bilden 90°-Winkel, haben dieselbe Länge)
$\mathbb{R}^3$:



Hier liest man also ab:

$A(1|2|-1)$

3. Verbindungsvektor

Der Verbindungsvektor zweier Punkte A und B errechnet sich aus $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$

<u>Beispiel:</u> $A(1|-2|3)$ $B(-3|0|6)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 0\ +2 \\ 6\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

II. Vektorgeometrie

§ 07. Basisvektoren

1. Lineare Abhängigkeit

Problem: Man überprüfe die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf lineare Abhängigkeit.

Lösung: $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_1 \vec{b} + \lambda_1 \vec{c} = \vec{o}$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ führt zum homogenen GLS

I. $1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 = 0$
II. $0 \cdot \lambda_1 - 1 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 = 0$
III. $3 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 2 \cdot \lambda_3 = 0$

Lösung des homogenen GLS mit dem Determinantenkriterium (vgl. §04):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{matrix} = 2 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 2 \neq 0$$

Ergebnis: Das homogene GLS besitzt eine eindeutige Lösung, nämlich die triviale Nulllösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Damit sind die Vektoren linear unabhängig.

Bemerkung: Die Spalten der Determinante D bestehen aus den drei Vektoren.

Merke:

① 3 Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ sind genau dann *linear abhängig*, wenn für die aus ihnen gebildete Determinante D gilt:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$ (Determinantenkriterium)

② 2 Vektoren $\vec{a}$; $\vec{b}$ sind genau dann *linear abhängig* (parallel), wenn gilt:

$\lambda \vec{a} = \vec{b}$

2. Basiswechsel

Beispiel:

Zeige, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des V^2 bilden und bestimme dann die Komponenten- sowie die Koordinatendarstellung des Vektors $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ in dieser Basis.

a) „Vektoren sind Basis“:

① Lineare Unabhängigkeit von 2 Vektoren:

$\lambda\vec{a} = \vec{b}$

$\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \lambda = 2 \\ \Rightarrow \lambda = 0 \end{matrix}$ (Widerspruch!)

Also: Die Vektoren sind linear unabhängig.

② Vektoren erzeugen den V^2:

$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} = \vec{v}$ (Gleichung nach λ_1 und λ_2 auflösen; muss eindeutige Lösung in Abhängigkeit von den Koordinaten des Vektors $\vec{v}$ ergeben)

$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

I. $\lambda_1 + 2\lambda_2 = v_1$

II. $\lambda_1 = v_2$

λ_1 in I. $\lambda_2 = 0{,}5\cdot(v_1 - v_2)$

Also gibt es eine eindeutige Lösung: $\lambda_1 = v_2$ und $\lambda_2 = 0{,}5\cdot(v_1 - v_2)$

Damit: Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden eine Basis des V^2.

b) Komponentendarstellung:

$\lambda_1 = c_1 \Rightarrow \lambda_1 = 4$

$\lambda_2 = 0{,}5\cdot(c_1 - c_2) \Rightarrow \lambda_2 = 0{,}5\cdot(4 - 5) = -½$

Also: $\vec{c} = 4\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ (Komponentendarstellung von $\vec{c}$)

$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}_{\vec{a};\vec{b}}$ (Koordinaten von $\vec{c}$ in der neuen Basis)

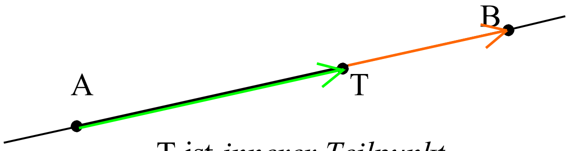
§ 8. Das Teilverhältnis

1. Begriff

Durch A und B wird eine Gerade festgelegt. T sei ein Punkt auf der Gerade:

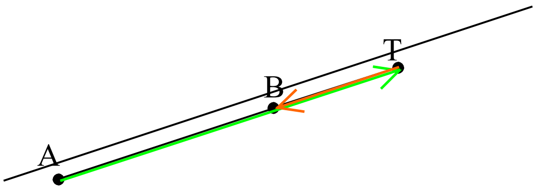
Definition:
Gegeben sind drei verschiedene Punkte A, B, T auf einer Geraden, so dass gilt: $\overrightarrow{AT} = \lambda\overrightarrow{TB}$.
λ heißt das *Teilverhältnis, in dem die Strecke AB durch T geteilt wird.*

1. $\lambda > 0$ ($\overrightarrow{AT}$ und $\overrightarrow{TB}$ gleichgerichtet)



T ist *innerer Teilpunkt*

2. $\lambda < 0$ ($\overrightarrow{AT}$ und $\overrightarrow{TB}$ entgegengesetzt gerichtet)



T ist *äußerer Teilpunkt*

2. Berechnung des Ortsvektors t des Teilpunkts T:

$\overrightarrow{AT} = \lambda\overrightarrow{TB}$;

$\vec{t} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{t})$

$\vec{t} + \lambda\vec{t} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$

Also:

$$\boxed{\vec{t} = \frac{\vec{a} + \lambda\vec{b}}{1+\lambda}} \quad \text{(falls } \lambda \neq -1\text{)}$$

3. Anwendungen:

Mittelpunkt M einer Strecke [AB]: ($\lambda = 1$)

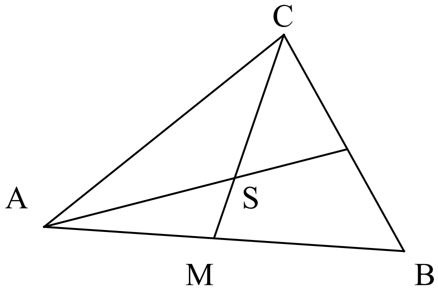
$$\boxed{\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}}$$

Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC:

$$\boxed{\vec{s} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}} \quad \text{(Herleitung : s. Übung)}$$

4. Beispiel zum Bestimmen des Teilverhältnisses mit geschlossener Vektorkette

In welchem Verhältnis wird eine Seitenhalbierende eines Dreiecks durch den Schwerpunkt geteilt?



① Suche eine geschlossene Vektorkette, die den gesuchten (Schnitt–)punkt als Ecke enthält.

Geschlossene Vektorkette: ASMA

$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MA} = \vec{o}$

② Bestimme 2 (im IR^2) oder 3 (im IR³) linear unabhängige Vektoren und drücke die vorkommenden Vektoren durch diese aus:

linear unabh.: $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ $\vec{b} + \overrightarrow{AB}$

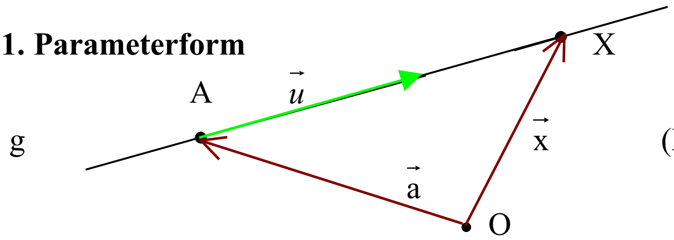
$\overrightarrow{AS} = \lambda\overrightarrow{AN} = \lambda(\vec{b} + \overrightarrow{BN}) = \lambda(\vec{b} + 0{,}5\overrightarrow{BC}) = \lambda[\vec{b} + 0{,}5(-\vec{b} + \vec{a})] = 0{,}5\lambda\vec{b} + \lambda\vec{a})]$

Geschlossene Vektorkette: ASMA

$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MA} = \vec{o}$

§ 9. Die Gerade

1. Parameterform



(X ist beliebiger Punkt auf g)

Um eine Gerade festzulegen, benötigt man

- den Ortsvektor $\vec{a}$ eines festen, beliebigen Punktes der Geraden (*Aufhängepunkt*) und
- einen Vektor $\vec{u}$, der die Richtung der Gerade angibt (*Richtungsvektor RV*):

Gleichung in Parameterform: g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$

Beispiele:

① x_1 – Achse des Koordinatensystems im IR^2:

Aufhängepunkt ist hier: O(0/0);

Richtungsvektor: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

Also: g: $\vec{x} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

② Gerade g durch die Punkte A(2/5/3) und B(0/1/3)

Aufhängepunkt ist hier: A(2/5/3);

Richtungsvektor: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 1 - 5 \\ 3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Also: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Gegenseitige Lage zweier Geraden g und h:

g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$ h: $\vec{x} = \vec{b} + \lambda \vec{v}$

① Parallelität (g || h)

- RV sind parallel ($\vec{u}, \vec{v}$ linear abhängig)
- Verbindungsvektor $\vec{a} - \vec{b}$ ist nicht parallel zu einem der RV ($\vec{a} - \vec{b}, \vec{u}$ linear unabhängig)

② Identität (g ≡ h)

- RV sind parallel ($\vec{u}, \vec{v}$ linear unabhängig)
- Verbindungsvektor $\vec{a} - \vec{b}$ der Aufhängepunkte ist parallel zu jedem RV ($\vec{a} - \vec{b}$, u linear abhängig)

③ Schneiden in einem Punkt ($g \cap h = \{S\}$)

- RV nicht parallel ($\vec{u}, \vec{v}$ linear unabhängig)
- $\vec{a} - \vec{b}$ und die beiden RV liegen in einer Ebene ($\vec{a} - \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}$ linear abhängig)

④ Windschief

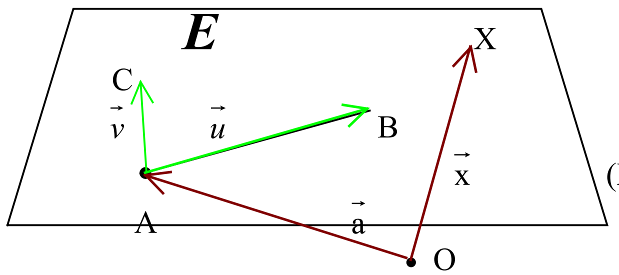
- RV nicht parallel ($\vec{u}, \vec{v}$ linear unabhängig)
- $\vec{a} - \vec{b}$ und die beiden RV liegen nicht in einer Ebene ($\vec{a} - \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}$ linear unabhängig)

Hinweis: Soll man nur untersuchen, ob 2 Geraden windschief sind, so untersucht man mit dem Determinantenkriterium die Vektoren $\vec{a} - \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}$ auf lineare Unabhängigkeit.

Ist D = 0, so sind die Geraden nicht windschief, Ist D ≠ 0, sind sie windschief.

§ 10. Die Ebene

1. Parameterform



(X ist beliebiger Punkt auf E)

Um eine Ebene festzulegen, benötigt man

- den Ortsvektor $\vec{a}$ des Aufhängepunkts und
- zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$

Gleichung in Parameterform: E: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

Beispiele:

a) $x_1 - x_2$ – Ebene des Koordinatensystems im IR^3:

Aufhängepunkt ist hier:

Richtungsvektoren: $\vec{u} =$ $\vec{v} =$

Also: E:

b) Ebene durch die Punkte A(1/2/3) und B(5/-2/-5) C(0/1/1)

Aufhängepunkt ist hier:

Richtungsvektoren:

-
-

Also: E:

2. Gegenseitige Lage zweier Ebenen E und F:

E: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ F: $\vec{x} = \vec{b} + \sigma\vec{w} + \tau\vec{z}$

① Sind die beiden RV der einen Ebene und jeweils einer der RV der anderen Ebene linear abhängig (d.h. alle vier RV liegen in einer Ebene), also:
Sind $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *und* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$ linear abhängig (Bei Abhängigkeit 2 Determinanten bilden!)?

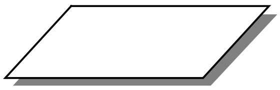
JA

② Sind die RV einer der Ebenen und $\vec{b}-\vec{a}$ linear abhängig ($\vec{b}-\vec{a}$ und die RV einer Ebene liegen in dieser Ebene), also:
Sind $\vec{b}-\vec{a}, \vec{u}, \vec{v}$ linear abhängig?

JA

Die beiden Ebenen sind identisch

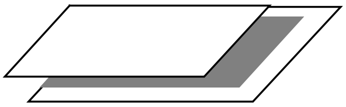
E ≡F



NEIN

Die beiden Ebenen sind echt parallel

E||F

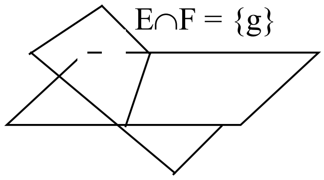


NEIN

Das bedeutet: Drei der vier RV liegen nicht in einer Ebene:
$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *oder* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$ linear unabhängig

E und F schneiden in einer Geraden

E∩F = {g}



Merke:
Die Schnittgeraden einer Ebene E mit den Koordinatenebenen nennt man *Spurgeraden*.

Beispiel: Überprüfe die gegenseitige Lage der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ mit der x_1-x_2-Ebene des Koordinatensystems und bestimme gegebenenfalls die Gleichung der Spurgerade g.

a) Gegenseitige Lage: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und F: $\vec{x} =$

①

Ergebnis: Die beiden Ebenen ____ .

b) Gleichung der Spurgeraden g:

① Gleichsetzen und nach einen Parameter einer Ebene in Abhängigkeit des anderen bestimmen:

② Einsetzen

2. Gegenseitige Lage einer Ebene E und einer Geraden g:

E: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ g: $\vec{x} = \vec{b} + \sigma \vec{w}$

① Sind die drei RV der Ebene und der Gerade linear abhängig (d.h. der RV der Gerade und die RV der Ebene liegen in einer Ebene), also:
Sind $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ linear abhängig?

JA

② Sind die RV der Ebene und $\vec{b} - \vec{a}$ linear abhängig? ($\vec{b} - \vec{a}$ liegt in der Ebene E), also:
Sind $\vec{b} - \vec{a}, \vec{u}, \vec{v}$ linear abhängig?

JA

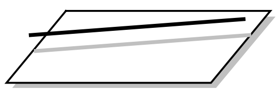
Die Gerade liegt in der Ebene:

$g \subseteq E$

NEIN

Die Gerade und die Ebene sind echt parallel:

$E \| g$

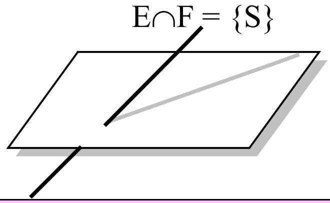


NEIN

Das bedeutet: Die drei RV liegen nicht in einer Ebene:

E und g schneiden in einem Punkt S:

$E \cap F = \{S\}$



Merke:
Die Schnittpunkte einer Geraden g mit den Koordinatenebenen nennt man *Spurpunkte*.

§ 11. Geometrische Interpretation linearer GLS

1. Gleichungssysteme

Ein GLS besitze n nichtäquivalente Gleichungen und m verschiedene Unbekannte.

Beispiel ①:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Hier: $n = 3$; $m = 2$

Merke:

- Ist $n > m$, so heißt das GLS *überbestimmtes GLS*.
  → Aus m Gleichungen die m Unbekannten ermitteln und in die übrige(n) Gleichungen einsetzen
- Ist $n < m$, so heißt das GLS unterbestimmtes GLS.
  → $m - n$ Unbekannte sind frei wählbar (*unabhängige Variablen*), die restlichen n Unbekannten sind von diesen abhängig (*abhängige Variablen*).

Beispiel ① ist ein überbestimmtes GLS.

→ aus 2 Gleichungen die beiden Unbekannten ermitteln und in die 3. Gleichung einsetzen:

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 \\ \text{II.} \quad & x_1 + 2x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 3 \Rightarrow x_1 = -3 \\ \text{III.} \quad & x_1 + 3x_2 = 6 \\ x_2, x_1 \text{ in III.} \quad & -3 + 3\cdot 3 = 6 \\ & 6 = 6 \end{aligned}$$

Lösung: $(-3/3)$ (Punkt im IR^2)

Beispiel ②: $x_1 + x_2 - x_3 = 4$ (*) $m = 3$; $n = 1$ (→2 Variablen frei wählbar)

Wähle: $x_1 = \lambda$

$x_2 = \mu$

$\lambda + \mu - x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = 4 - \lambda - \mu$

→ vektoriell schreiben:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 4-\lambda-\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +1\lambda & +0\mu \\ 0 & +0\lambda & +1\mu \\ 4 & -1\lambda & -1\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Ebene im } IR^3\text{)}$$

Die Gleichung (*) nennt man Koordinatenform einer Ebene.

Merke:

Die Anzahl der Variablen bestimmt den Punktraum (bei m Variablen: IR^m),
die Anzahl $n - m$ der freiwählbaren Variablen das geometrische Aussehen der Lösungsmenge:

$n - m = 0$ Punkt
$n - m = 1$ Gerade
$n - m = 2$ Ebene

2. Parameterform – Koordinatenform

a) Von der Koordinatenform in die Parameterform:

Um eine Ebene/Gerade von ihrer Koordinatenform
E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ g: $ax_1 + bx_2 = c$
in ihre Parameterform
E: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ g: $\vec{x} = \vec{b} + \sigma\vec{w}$
umzuwandeln, geht man wie in Beispiel ② vor.

b) Von der Parameterform in die Koordinatenform:

am Bsp.: E: $\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

① Stelle ein GLS auf:

I. $x_1 = 2 + 1\lambda + 0\mu$
II. $x_2 = 5 + 2\lambda + 0\mu$
III. $x_3 = 3 + 0\lambda + 1\mu$

② Berechne aus 2 Gleichungen die Parameter λ und μ und setze sie dann in die dritte ein:

III. $\mu = x_3 - 3$
II. $2\lambda = x_2 - 5 \Rightarrow \lambda = 0{,}5x_2 - 2{,}5$
in I. $x_1 = 2 + 0{,}5x_2 - 2{,}5$

③ Ordne die Gleichung und multipliziere sie so, dass nur ganzzahlige Koeffizienten vorkommen:

$x_1 = 2 + 0{,}5x_2 - 2{,}5 | \cdot 2$
$2x_1 = 4 + x_2 - 5$
$2x_1 - x_2 = -1$

c) Besondere Ebenen:

$x_3 = 0$ ______________________________
$x_2 = 0$ ______________________________
$x_1 = 0$ ______________________________
$x_1 = 4$: ______________________________

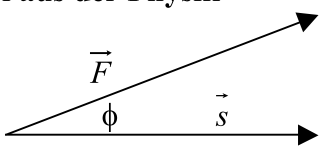
III Metrische Probleme

§ 12. Das Skalarprodukt

1. Betrag eines Vektors:

Definition:
Unter dem Betrag eines Vektors a versteht man die Maßzahl der Länge eines seiner Repräsentanten. Schreibweise: $|\vec{a}|$ oder a.

2. Beispiel aus der Physik



W = F·s·cosϕ

Verknüpfung der Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{s}$ führt zum Skalar W

2. Definition:

Die Verknüpfung der Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in V^n$

$\vec{a} \circ \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\phi$ (mit $0° \le \phi \le 180°$),

die jedem Vektorpaar eine reelle Zahl zuordnet, nennt man *Skalarprodukt*.
Ein Vektorraum mit Skalarprodukt heißt *euklidischer Vektorraum*.

3. Skalarprodukt in Koordinatenschreibweise:

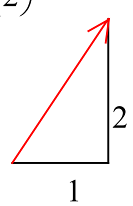
V^2: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2$

V^3: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 10 + 5 - 3 = 12$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1^2 + 2^2 = 5$$



Im euklidischen Vektorraum ist $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$

Es gilt für die Länge $\overline{AB}$ einer Strecke [AB]: $\overline{AB} = \left|\vec{b} - \vec{a}\right| = \sqrt{(\vec{b} - \vec{a}) \circ (\vec{b} - \vec{a})}$

4. Einheitsvektoren

Gegeben ist ein beliebiger Vektor $\vec{a}$.

Ein Vektor mit Länge 1, der dieselbe Richtung und Orientierung wie ein Vektor $\vec{a}$ besitzt, heißt Einheitsvektor von $\vec{a}$ (Schreibweise: $\overrightarrow{a°}$). Statt „Bestimme den Einheitsvektor von $\vec{a}$!" sagt man auch „Normiere $\vec{a}$!"

Es gilt: $\overrightarrow{a°} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Beispiel:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ $\quad \overrightarrow{a°} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

5. Winkel zwischen Vektoren:

$$\cos\phi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

► ϕ nennt man den *Zwischenwinkel der Vektoren* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$.

► Ist $\phi = 90°$, so sagt man: „Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen senkrecht aufeinander" oder „$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal"

► Für zwei orthogonale Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt: $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$

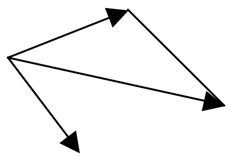
► Schneiden sich 2 Geraden so nennt man den kleinsten Winkel, den sie miteinander bilden *Schnittwinkel der Geraden*.

Beispiel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix};\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos\phi = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2+4^2} \cdot \sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{3-8}{5 \cdot \sqrt{5}} = -\frac{5}{5 \cdot \sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \phi = 116{,}57°$$

6. Winkelhalbierender Vektor:

$\vec{w} = \overrightarrow{a°} + \overrightarrow{b°}$



§ 13. Die Normalenform einer Geraden

1. Normalenvektor:

Ein Vektor $\vec{n}$, der auf eine Gerade senkrecht steht, heißt Normalenvektor der Geraden (Richtung ist nur im IR^2 eindeutig!)

z.B. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bestimmung des Normalenvektors durch Vertauschen der Koordinaten des RV und Multiplikation einer der beiden mit –1:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Normalengleichung:

Eine Gerade g kann im IR^2 eindeutig durch folgende Gleichung beschrieben werden:

g: $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a})$ dabei ist $\vec{n}$ der Normalenvektor von g

(*Normalengleichung/ Normalenform (NF) von g* – ist nicht eindeutig wegen beliebiger Länge/Orientierung von $\vec{n}$)

Benötigt wird
– der Ortsvektor $\vec{a}$ eines beliebigen Punktes A auf g (z.B. Aufhängepunkt)
– der Normalenvektor $\vec{n}$ von g

Beispiel:

1. geg.: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   ges.: Normalengleichung von g

   Lös.: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   $$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0 \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

   $$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} - 4 = 0 \quad \text{(NF)}$$

   Ersetzt man $\vec{x}$ durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, erhält man: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 4 = 0$ (NF)

   $2x_1 + x_2 - 4 = 0$ (*Normalengleichung in Koordinatenform*)

2. geg.: g: $x_1 - 2x_2 - 4 = 0$

ges.: Parametergleichung von g

Lös.: *Obige Gleichung ist ein GLS mit 1 Gleichung und 2 Unbekannten. Damit ist eine der beiden frei wählbar, z. B. x_2.*

Also: Setze **$x_2 = \lambda$**

Einsetzen in die Gleichung: $x_1 - 2\lambda - 4 = 0$

Auflösen nach x_1: **$x_1 = 2\lambda + 4$**

Setze in die Parameterform $\vec{x} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ der Geradengleichung zeilenweise ein:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 + 2\lambda \\ x_2 &= 0 + 1\lambda \end{aligned} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die gesuchte Form.

3. Hesse-Form (HNF):

Verwendet man den vom Ursprung zur Geraden zeigenden Einheitsvektor $\overrightarrow{n^\circ} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ von $\vec{n}$, so erhält man die Hesseform der Normalengleichung (*HNF*) (eindeutig!):

g: $\overrightarrow{n^\circ} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ (wobei $\overrightarrow{n^\circ} \circ \vec{a} \geq 0$)

<u>Beispiel:</u>

geg.: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

ges.: HNF von g

Lös.: ① *Bestimme die NF von g* (wie Bsp. 1 von oben)

g: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} - 4 = 0$ (NF)

g: $2x_1 + x_2 - 4 = 0$ (NF)

② *Bestimme* $|\vec{n}|$: $|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

③ *Teile die Koordinatenform der NF durch diesen Betrag und achte darauf, dass die Konstante ein – als Vorzeichen hat. (Gegebenenfalls mit –1 multiplizieren)*

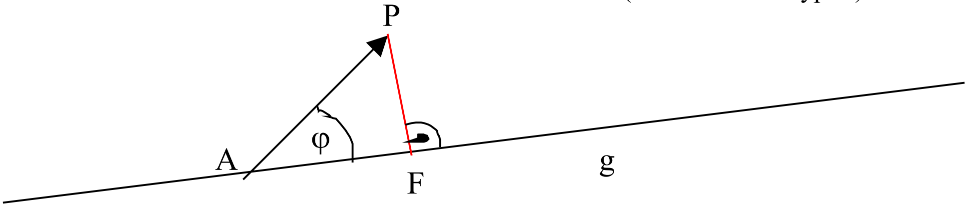
$$\frac{2}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} x_2 - \frac{4}{\sqrt{5}} = 0 \text{ (HNF)}$$

4. Anwendung:

Setzt man den Ortsvektor eines Punkts P $\notin$ g in die linke Seite der HNF:

$$\overrightarrow{n^\circ}(\vec{p}-\vec{a}) = |\overrightarrow{n^\circ}| \cdot |(\vec{p}-\vec{a})| = 1 \cdot \overline{AP} \cdot \cos\varphi = 1 \cdot \overline{AP} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{AP}} = \overline{AF}$$

(cos =Ankath./Hypot.)



$\overline{AF}$ ist der Abstand von P zu g.

<u>Satz:</u>
Eine Gerade g sei durch ihre HNF

g: $\overrightarrow{n^\circ}(\vec{x}-\vec{a}) = 0$

gegeben und ein Punkt P (mit Ortsvektor $\vec{p}$) außerhalb der Geraden, so gilt

$\overrightarrow{n^\circ}(\vec{p}-\vec{a}) = d$

wobei e = |d| der Abstand d(P;g) von P zur Geraden g ist.

Das Vorzeichen von d gibt an, ob P und der Ursprung O auf derselben Seite (d < 0) oder auf verschiedenen Seiten (d > 0) von g liegen.

§ 14. Die Normalenform einer Ebene

1. Normalengleichung:

Eine Ebene E kann (im IR^3) eindeutig durch folgende Gleichung beschrieben werden:

E: $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ (NF) dabei ist $\vec{n}$ der Normalenvektor von E

Benötigt wird auch hier
– der Ortsvektor $\vec{a}$ eines beliebigen Punktes A auf E (z.B. Aufhängepunkt)
– der Normalenvektor $\vec{n}$ von E

Ebenso wie bei einer Geraden erhält man die HNF
$\overrightarrow{n^\circ} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ mit $\overrightarrow{n^\circ} \circ \vec{a} \geq 0$
und kann die Entfernung e eines Punktes P von der Ebene E bestimmen:
$e = |d| = |\overrightarrow{n^\circ}(\vec{p} - \vec{a})|$

2. Bestimmung des Normalenvektors:

Der Normalenvektor $\vec{n}$ einer Ebene E: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ muss auf beide RV senkrecht stehen.

- Möglichkeit 1:

$\vec{n}$ über den Ansatz $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$ und $\vec{v} \circ \vec{n} = 0$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ ermitteln

Beispiel:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} \circ \vec{n} = 0$	$\vec{v} \circ \vec{n} = 0$
$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$
$n_1 - 2n_3 = 0$	$n_2 + 3n_3 = 0$

(*2 Gleichungen mit 3 Unbekannten – 1 Unbekannte ist frei wählbar, z. B. $n_3 = \lambda$*)

$n_1 - 2\lambda = 0$ $n_2 + 3\lambda = 0$
$n_1 = 2\lambda$ $n_2 = -3\lambda$

Zeilenweise in den Vektor $\vec{n}$ einsetzen:

$$\begin{aligned} n_1 &= 2\lambda \\ n_2 &= -3\lambda \\ n_3 &= \lambda \end{aligned} \qquad \vec{n}' = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ -3\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}; \text{ jede Koordinate durch } \lambda \text{ teilen: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- <u>Möglichkeit 2:</u>

  mit Vektorprodukt $\vec{u} \times \vec{v}$

  <u>Beispiel:</u>

  $$\text{E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

  $$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \\ -[1 \cdot 3 - 0 \cdot (-2)] \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Bestimmung des Normalenform (NF) und der HNF:

<u>Beispiel:</u>

Ebene E aus 1 bzw. 2

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } |\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0 \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} - 8 = 0 \text{ (NF)}$$

$2x_1 - 3x_2 + x_3 - 8 = 0$ (*Normalengleichung in Koordinatenform*)

Für HNF: Teilen durch $|\vec{n}| = 2\sqrt{3}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{3}{2\sqrt{3}} x_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}} x_3 - \frac{4}{\sqrt{3}} = 0 \text{ (HNF)}$$

§ 15. Abstandsprobleme

1. Punkt–Punkt:

d(P;Q) = $|\vec{q} - \vec{p}|$

2. Punkt–Gerade

a) im IR^2

d(P;Q) = e = |d| = $|\vec{n}^\circ(\vec{p} - \vec{a})|$ (HNF der Geraden bilden; P in linke Seite einsetzen)

b) im IR^3

① Bestimme die Normalenform einer Hilfsebene H, die P enthält und senkrecht zur Geraden steht. (Hier ist der RV der Geraden der Normalenvektor und P der Aufhängepunkt)

② Bestimme durch Einsetzen von g in die Ebene den Schnittpunkt S von Ebene und Gerade

③ Der Abstand ist dann $|\overrightarrow{PS}|$

Beispiel:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ P(0/1/2)

① $g: \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0$

H: $x_1 + 2x_3 - 4 = 0$ (NF)

② g in H: $1 + \mu + 2(3 + 2\mu) - 4 = 0 \Rightarrow \mu = -1$

μ in g: $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ S(0/2/1)

③ $d(P;g) = |\overrightarrow{PS}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

3. Punkt–Ebene (nur im IR^3)

Einsetzen von P in die linke Seite der HNF der Ebene

4. Gerade–Gerade

a) IR^2

Methode zur Untersuchung der gegenseitigen Lage: (μ ist der Parameter von g)

① HNF der einen Gerade h bestimmen

② Gerade g in linke Seite der HNF $n^o(x - a)$ einsetzen und berechnen.

③ Lösung interpretieren:

- μ fällt weg und Lösung ist 0: g = h
- μ fällt weg und Lösung ist $d \in IR\backslash\{0\}$: g || E im Abstand |d|; VZ von d wie bei Punkt
- μ bleibt erhalten: g und h schneiden sich (SP: Term Null setzen, nach μ auflösen und μ in g einsetzen)

b) IR^3

– *Parallel* Wie bei 2.:

- Hilfsebene H, die senkrecht auf die Geraden steht (RV ist Normalenvektor) und den Aufhängepunkt A der einen Geraden enthält;
- Schnittpunkt S von Hilfsebene und der anderen Geraden bestimmen.
  $d(g;h) = |\overrightarrow{AS}|$

– *Windschief*

① Hilfsebene E in Parameterform, die g enthält und || zu h ist (RV von g und h verwenden)

② HNF von E

③ Aufhängepunkt von h in linke Seite der HNF einsetzen (denn der Abstand von Aufhängepunkt und E ist der gesuchte)

Beispiel: Zeige, dass die Geraden

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

windschief sind und bestimme dann ihren Abstand.

Lösung:

Teil a) g und h windschief:

$$\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sind die beiden RV und dieser Verbindungsvektor der Aufhängepunkte linear unabhängig, dann sind g und h windschief. Überprüfung mit der Determinante (darf nicht 0 sein!)

$$\det\left((\vec{b} - \vec{a}), \vec{u}, \vec{v}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \\ -1 & -2 \end{matrix} =$$

$= 2\cdot 3\cdot 2 + 4\cdot 1\cdot(-1) + 0\cdot 6\cdot(-2) - [4\cdot 6\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot(-2) + 0\cdot 3\cdot(-1)] = 12 - 4 - (48 - 4) = -36 \neq 0$

$\Rightarrow$ g und h sind windschief.

Teil b) Abstand:

① E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

② $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{n}| = 3$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 6 = 0 \ \text{(NF)}$$

$$\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - 2 = 0 \qquad \text{(HNF)}$$

③ $d = \frac{2}{3}\cdot 2 - \frac{2}{3}\cdot(4+\mu) + \frac{1}{3}\cdot(1+2\mu) - 2 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} - 2 = -3 \ \Rightarrow \ e = 3$

Der Abstand der beiden windschiefen Geraden beträgt 3.

5. Gerade–Ebene (nur IR³)

Methode zur Untersuchung der gegenseitigen Lage: (μ ist der Parameter von g)

① HNF der Ebene bestimmen

② Gerade in linke Seite der HNF $n^o(x - a)$ einsetzen und berechnen.

③ Lösung interpretieren:

- μ fällt weg und Lösung ist 0: $g \in E$
- μ fällt weg und Lösung ist $d \in IR\backslash\{0\}$: g || E im Abstand |d|; VZ von d wie bei Punkt
- μ bleibt erhalten: g und E schneiden sich (SP: Term Null setzen, nach μ auflösen und μ in g einsetzen)

6. Ebene–Ebene (nur IR³)

Methode zur Untersuchung der gegenseitigen Lage:

① HNF der einen Ebenen bestimmen

② Die andere Ebene einsetzen

③ Lösung interpretieren (siehe 5.)

7. Kugel (im IR³) und Kreis (im IR²)

Alle Punkte X, die von einem Punkt M einen festen Abstand r > 0 haben, liegen auf der Kugeloberfläche bzw. Kreislinie um M mit Radius r.

Gleichung: $|\vec{x} - \vec{m}| = r$

Beispiel:
Bestimme die gegenseitige Lage der Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und des Kreises um M(1/1) mit Radius r = $2\sqrt{2}$.

Lösung:

Kreisgleichung: $\left| \vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 2\sqrt{2}$

Koordinatenform bestimmen:

$\sqrt{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2} = 2\sqrt{2} \quad |^2$

$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 8$

$x_1^2 - 2x_1 + 1 + x_2^2 - 2x_2 + 1 = 8$

k: $x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 6 = 0$

Gerade in Kreis einsetzen:

g in k: $(4 + \lambda)^2 - 2(4 + \lambda) + (2 - \lambda)^2 - 2(2 - \lambda) - 6 = 0$

$\lambda^2 + 8\lambda + 16 - 8 - 2\lambda + 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 4 + 2\lambda - 6 = 0$

$2\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0$

Interpretation::

keine Lösung:	Gerade ist Passante	(kein Schnittpunkt)
genau 1 Lösung:	Gerade ist Tangente	(1 Berührpunkt)
genau 2 Lösung:	Gerade ist Sekante	(2 Schnittpunkte)

$2(\mu+1)^2 = 0$ => $\mu = -1$ Gerade ist Tangente an den Kreis,

Berührpunkt: $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ => B(3/3)

8. Einsetzen oder Gleichsetzen?

PF: Parameter-; NF: Normalenform

Gegeben:	Vorgang:
NF – PF	PF in NF einsetzen
PF – PF	PF und PF gleichsetzen
NF – NF	beide NF als GLS mit 2 Gleichungen lösen (bei 3 Unbekannten: 1 frei wählbar)

§ 18. Winkel

1. Wiederholung:

Der *Zwischenwinkel φ zweier Vektoren* $\vec{a}$ und $\vec{b}$ errechnet sich nach der Formel:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{a \cdot b}} \qquad \text{mit } a = |\vec{a}| \text{ und } b = |\vec{b}|$$

Setzt man die Richtungsvektoren zweier Geraden in diese Formel ein, so erhält man den Schnittwinkel der beiden Geraden.

Mit der NF einer Ebene können nun auch Zwischenwinkel zweier Ebenen oder einer Ebene/Gerade bestimmt werden.

2. Winkel zwischen zwei Ebenen E und F

E: $\vec{n}_1 \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ (NF)

F: $\vec{n}_2 \circ (\vec{x} - \vec{b}) = 0$ (NF)

Der Zwischenwinkel von E und F ist so groß wie der Zwischenwinkel der beiden Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$

Also setzt man diese in die Formel ein und erhält für den *Zwischenwinkel φ zweier Ebenen*:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2}{n_1 \cdot n_2}} \quad \text{mit } n_1 = |\vec{n}_1| \text{ und } n_2 = |\vec{n}_2|$$

3. Winkel zwischen einer Gerade g und einer Ebene E

E: $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ (NF)

g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$

Verwendet man den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene und den Richtungsvektor $\vec{u}$ der Gerade, so stellt man fest dass der Winkel φ^* zwischen diesen n i c h t der Winkel zwischen Ebene und Gerade ist. Der gesuchte Winkel φ und φ^* ergänzen sich jedoch zu 90°.

Also gilt: $\boldsymbol{\varphi^* = 90° - \varphi}$.

Außerdem ist

$$\cos\varphi^* = \mathbf{\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi}$$

und man kann somit den Winkel φ zwischen Gerade und Ebene mit folgender Formel bestim–men:

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{\vec{n} \circ \vec{u}}{n \cdot u}} \quad \text{mit } n = |\vec{n}| \text{ und } u = |\vec{u}|$$

§ 17. Weitere Anwendungen

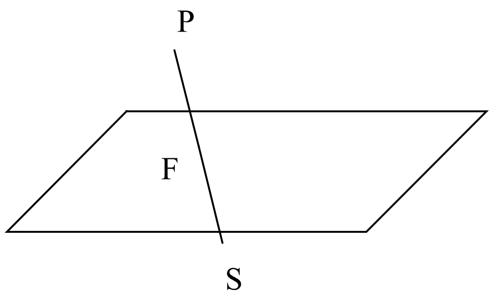
1. Achsenabschnittsform:

Bringt man die NF $ax_1 + bx_2 + c\,x_3 - d = 0$ durch Division durch d auf die Form:
$ex_1 + fx_2 + g\,x_3 = 1$
so hat man die Achsenabschnittsform (AAF). Die SP der Ebene mit den Achsen sind hier leicht abzulesen:
SP mit x_1-Achse: $A_1(e/0/0)$
SP mit x_2-Achse: $A_2(0/f/0)$
SP mit x_3-Achse: $A_3(0/0/g)$

Beispiel:
$x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 2 = 0$ (NF)
$0{,}5x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1$ (AAF)

2. Lotfuß- und Spiegelpunkt

Gegeben ist die HNF einer Ebene mit Normaleneinheitsvektor $\overrightarrow{n°}$ und ein Punkt P außerhalb der Ebene. Der gerichtete Abstand von P zu E sei d (d = $\overrightarrow{n°}(\vec{p} - \vec{a})$)Von P wird auf E das Lot gefällt:



Der Lotfußpunkt F errechnet sich aus: $\vec{f} = \vec{p} - d\overrightarrow{n^o}$

Der Spiegelpunkt S, der bei Spiegelung von P an E entsteht, errechnet sich aus: $\vec{f} = \vec{p} - 2d\overrightarrow{n^o}$

Beispiel:

E: $\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}x_3 - \frac{14}{\sqrt{5}} = 0$ (HNF) P(4/2/1)

d = $\frac{8}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{14}{\sqrt{5}} = -\frac{5}{\sqrt{5}}$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

Lotfußpunkt: $\vec{f} = \vec{p} - d\overrightarrow{n^o} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{10}{5} \\ 0 \\ \frac{5}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ F (6/2/2)

Spiegelpunkt: $\vec{s} = \vec{p} - 2d\overrightarrow{n^o} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{10}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{20}{5} \\ 0 \\ \frac{10}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ S (8/2/3)

3. Geometrische Figuren in der Vektorrechnung

Parallelogramm: Gegenüberliegende Seitenvektoren haben dieselbe Richtung und denselben Betrag

Rechteck: Parallelogramm, aber ein Eckwinkel ist 90°

Quadrat: Alle Seiten gleichlang, ein rechter Winkel

Rechteck, 2 nebeneinanderliegende Seiten gleichlang

Dreieck: Punkte liegen nicht auf einer Geraden (lineare Unabhängigkeit zweier Seitenvektoren)

4. Formeln aus der FS und ihre Bedeutung

- Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC

  $\vec{s} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

- Flächeninhalt eines Parallelogramms/Dreiecks, das von den Vektoren $\vec{a};\vec{b}$ erzeugt wird:

  $A_P = |\vec{a} \times \vec{b}|$ bzw. $A_\Delta = \dfrac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

- Volumen eines Spats, der von den Vektoren $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ erzeugt wird:

  V = $\det(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$

- Volumen einer Pyramide, die von den Vektoren $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ erzeugt wird:

  V = $\dfrac{1}{3}\det(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$

Beispiel:

Die Punkte A(1/2/3), B(4/5/3), C (1/1/3) bilden ein Dreieck. Der Punkt D (5/4/8) bildet die Spitze eines Tetraeders, dessen Grundfläche das Dreieck ABC ist. Bestimme den Schwerpunkt S des Dreiecks, berechne den Flächeninhalt des Dreiecks und das Volumen des Tetraeders.