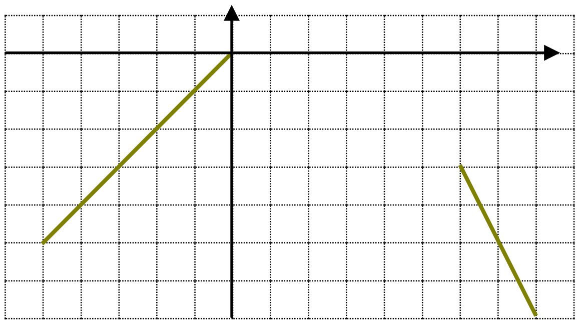
§15. Modellieren mit Funktionen

Hier wird ein Funktionsterm gesucht, der aus vorgegebenen Bedingungen modelliert wird.

Beispiel:

Eine Straße soll möglichst harmonisch über eine Kuppe gebaut werden.
Der Graph welcher ganzrationalen Funktion möglichst geringer Ordnung ist geeignet, die beiden Straßenstücke auszurunden?



Lösung:

① Schreibe einen allgemeinen Funktionsterm auf und bestimme seine Ableitung.

Parabel erscheint geeignet

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

② Formuliere aus den Bedingungen Gleichungen und vereinfache jede. (Es müssen mindestens so viele Bedingungen auffindbar sein, wie man unbekannte Koeffizienten hat).

I	$f(0) = 0$	$0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 0$	=>	$c = 0$
II	$f'(0) = 1$	$2 \cdot 0 \cdot a + b = 1$	=>	$b = 1$
III	$f(3) = -1{,}5$	$9 \cdot a + 3 \cdot b + c = -1{,}5$	=>	$9a + 3 = -1{,}5$
IV	$f'(3) = -2$	$2 \cdot 3 \cdot a + b = -2$	=>	$6a + 1 = -2$

Es sind mehr Gleichungen als Unbekannte!

③ Löse die Gleichungen.

Aus IV $a = -0{,}5$

In III $-4{,}5 + 3 = -1{,}5$

$-1{,}5 = -1{,}5$ (w) Hier könnte auch eine falsche Aussage entstehen, dies würde bedeuten, dass das Problem von keiner quadratischen Funktion gelöst wird. Man müsste es mit einem Polynom 3. Grades versuchen.

④ Gib den Funktionsterm an.

$f(x) = -0{,}5\, x^2 + x$

Allgemeine Terme - Faustregeln:

- Polynome n-ten Grades: $ax^n + \ldots + mx + n$
- Rationale Funktionen: $\dfrac{ax^n + \ldots}{gx^m + \ldots}$ oder $\dfrac{a(x-x_1)(x-x_2)\ldots}{b(x-x_5)(x-x_6)\ldots}$
- Periodische Funktionen: $a \cdot \sin(bx + c)$, $a \cdot \cos(bx + c)$ evtl. $a \cdot \tan(bx + c)$
- Logarithmus: $a \cdot \ln(bx+c)$
- Exponential: $a \cdot e^{bx + c}$ oder $a \cdot e^{bx}$
- Glocke: $a \cdot e^{-bx^2}$

<u>Beispiel:</u>
Der Graph einer ganzrationalen Funktion hat in A(1|3) einen Hochpunkt und in B(3|0) einen Tiefpunkt. Bestimme einen Funktionsterm mit möglichst geringer Ordnung.

<u>Lösung:</u>
Es scheint eine ganzrationale Funktion 3. Grades geeignet.

① $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

②						
I	$f(1) = 3$	a	$+ b$	$+ c$	$+ d$	$= 3$
II	$f(3) = 0$	$27a$	$+ 9b$	$+ 3c$	$+ d$	$= 0$
III	$f'(1) = 0$	$3a$	$+ 2b$	$+ c$		$= 0$
IV	$f'(3) = 0$	$27a$	$+ 6b$	$+ c$		$= 0$

③					
II – I	$26a$	$+ 8b$	$+ 2c$	$= -3$	(I*)
IV–III	$24a$	$+ 4b$		$= 0$	(II*)
I* – 2·III	$20a$	$+ 4b$		$= -3$	(III*)

II* – III*	$4a = 3$		$a = 0{,}75$
in II*	$24 \cdot 0{,}75 + 4b = 0$	$4b = 18$	$b = 4{,}5$
a, b in III	$3 \cdot 0{,}75 + 2 \cdot 4{,}5 + c = 0$		$c = -11{,}25$
a, b, c in I	$0{,}75 + 4{,}5 - 11{,}25 + d = 3$		$d = 9$

④ $f(x) = 0{,}75x^3 + 4{,}5x^2 - 11{,}25x + 9$
$f'(x) = 2{,}25x^2 + 9x - 11{,}25$ (nicht nötig nach Aufgabenstellung)