1. Aufgabe:
Bestimme die Ableitungen folgender Funktionen.

a) $f(x) = x^3 + 5$ $f'(x) = 3x^2$
b) $f(x) = x^4 - 4$ $f'(x) = 4x^3$
c) $f(x) = 8x^5$ $f'(x) = 40x^4$
d) $f(x) = x^3 + 8x^2 + 16x$ $f'(x) = 3x^2 + 16x + 16$
e) $f(x) = -x^3 + 8x^2 - 16x$ $f'(x) = -3x^2 + 16x - 16$
f) $f(x) = 2x^4 + 12x^3 + 18x^2$ $f'(x) = 8x^3 + 36x^2 + 36x$
g) $f_k(x) = x^3 - 4kx^2 + 4k^2x$ $f'(x) = 3x^2 + 8kx + 4k^2$
h) $f_k(x) = -x^3 + 8kx^2 - 16k^2x$ $f'(x) = -3x^2 + 16kx - 16k^2$
i) $f(x) = 2x^5 - 12x^4 + 18x^3$ $f'(x) = 10x^4 - 48x^3 + 54x^2$

2. Aufgabe:
Bestimme die Ableitungen folgender Funktionen $f: x \mapsto f(x)$

a) $f(x) = 7x^2 + 8x + 15$ $f'(x) = 14x + 8$
b) $f(x) = x^9 + 18x^2 + 80$ $f'(x) = 9x^8 + 36x$
c) $f(x) = 12x^2 + 6x^3 + 8$ $f'(x) = 24x + 18x^2$
d) $f(x) = 6\sqrt{x} - 11x = 6x^{0,5} - 11x$ $f'(x) = 3x^{-0,5} - 11 = \frac{3}{\sqrt{x}} - 11$
e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 11\sqrt{x^3} = x^{\frac{2}{3}} - 11x^{\frac{3}{2}}$ $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{33}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{33}{2}\sqrt{x}$
f) $f(x) = x\sqrt{x} + 5x^2\sqrt{x^3} = x^{1\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{7}{2}}$ $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{35}{2}x^{\frac{5}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{35}{2}\sqrt{x^5}$
g) $f(x) = \sqrt{2x} - \sqrt{11x} = \sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} + \sqrt{11}x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{11}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{x}}$
h) $f(x) = \sqrt[3]{8x^2} - \sqrt{17x^3} = 2x^{\frac{2}{3}} - \sqrt{17}x^{\frac{3}{2}}$ $f'(x) = \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}\sqrt{17}x^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{17x}$
i) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} + 5\sqrt{\frac{x}{14}} \cdot \sqrt{7x^3} =$
$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} + 5\sqrt{\frac{x \cdot 7x^3}{14}} = \frac{1}{\sqrt{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}x^2$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2x}} + \frac{10}{\sqrt{2}}x$
j) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = x^{-1} - x^{-2} + x^{-3}$ $f'(x) = -x^{-2} + 2x^{-3} - 3x^{-4} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}$
k) $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{12}{x^4} + \frac{1}{3x} = 3x^{-2} - 12x^{-4} + \frac{1}{3}x^{-1}$ $f'(x) = -6x^{-3} + 48x^{-5} - \frac{1}{3}x^{-2} = -\frac{6}{x^3} + \frac{48}{x^5} - \frac{1}{3x^2}$
l) $f(x) = \frac{3}{4x^2} - \frac{7}{12x^4} + \frac{5}{6x^3} = \frac{3}{4}x^{-2} - \frac{7}{12}x^{-4} + \frac{5}{6}x^{-3}$ $f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-3} + \frac{7}{3}x^{-5} - \frac{5}{2}x^{-4} = -\frac{3}{2x^3} + \frac{7}{3x^5} - \frac{5}{2x^4}$
m) $f(x) = \frac{3 + 2x + 5x^2}{2x^2} = \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{x} + \frac{5}{2}$
$= \frac{3}{2}x^{-2} + x^{-1} + \frac{5}{2}$ $f'(x) = -3x^{-3} - x^{-2} = -\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^2} = -\frac{3 + x}{x^3}$
n) $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 5}{6x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^{-1} + \frac{5}{6}x^{-2}$ $f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-2} - \frac{5}{3}x^{-3} = -\frac{1}{3x^2} - \frac{5}{3x^3} = -\frac{x + 5}{3x^3}$

o) f(x) = $\frac{2 - x^2}{\sqrt{x}} = 2x^{\frac{1}{2}} - x^{1,5}$ f'(x) = [illegible]

p) f(x) = [illegible]

[illegible]

q) f(x) = [illegible]

[illegible]

r) f(x) = [illegible]

[illegible]

Keine Angst: Die Teilaufgaben q) und r) sind keine typischen Schulaufgabenaufgaben.

3. Aufgabe:

a) $f(x) = ax^2 + a^2$	$f'(x) = 2ax$
b) $f(x) = x^7 + 18a^2x + 80b^3$	$f'(x) = 7x^6 + 18a^2$
c) $f(x) = x^5 + 6b^2x^2 + 8c^2$	$f'(x) = 5x^4 + 12b^2x$
d) $f(a) = ax^2 – 5x$	$f'(x) = x^2$
e) $f(d) = x^2 – ax + 30d$	$f'(x) = 30$
f) $f(d) = ax^9 + 5cd^2x – c^2$	$f'(x) = 12cdx$
g) $f(a) = c^2x^3 – 6a^3x^2 + 9x$	$f'(x) = 18a^2x^2$
h) $f(x) = bx^3 – ax + a^2$	$f'(x) = 3bx^2 – a$
i) $f(h) = gx^3 – 2hx^2 – h^2x$	$f'(x) = – 2x^2 – 2hx$
j) $f(x) = kx^3 – 13kx^2 – 10$	$f'(x) = 3kx^2 – 13kx$
k) $f(k) = 4kx^3 – 7k^2x – 12$	$f'(x) = 4x^3 – 14kx$
l) $f(m) = nx^3 + (m^2 + m)x^2$	$f'(x) = (2m + 1)x^2$

4. Aufgabe:

Der Scheitelpunkt ist der einzige Punkt einer Parabel, an dem die Steigung den Wert 0 hat. Also berechnet man die Ableitung, setzt sie Null und bestimmt den entsprechenden x-Wert. Diesen setzt man noch in f(x) ein, um die y-Koordinate zu erhalten.

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

$f'(x) = 2x + 2$

$f'(x) = 0$

$2x + 2 = 0$ $x = – 1$

$f(-1) = 1 – 2 + 3 = 2$ S(-1|2)

b) f(x) = –x² + 3x + 2

f'(x) = -2x + 3

f'(x) = 0

-2x + 3 = 0 x = 1,5

f(1,5) = -2,25 + 4,5 + 2 = 4,25 S(1,5|4,25)

c) f(x) = ax² + x

f'(x) = 2ax + 1

f'(x) = 0

2ax + 1 = 0 $x = -\frac{1}{2a}$

$f\left(-\frac{1}{2a}\right) = a\left(-\frac{1}{2a}\right)^2 - \frac{1}{2a} = \frac{1}{4a} - \frac{1}{2a} = -\frac{1}{4a}$ $S\left(-\frac{1}{2a}\middle|-\frac{1}{4a}\right)$

d) f(x) = –0,5x² + x + 5

f'(x) = -x + 1

f'(x) = 0

-x + 1 = 0 x = 1

f(-1) = -0,5 + 1 + 5 = 5,5 S(1|5,5)

e) f(x) = –kx² + 3x + k

f'(x) = -2kx + 3

f'(x) = 0

-2kx + 3 = 0 $x = \frac{3}{2k}$

$f\left(\frac{3}{2k}\right) = -k\left(\frac{3}{2k}\right)^2 + 3\cdot\frac{3}{2k} + k = -\frac{9}{4k} + \frac{9}{2k} + k = \frac{9+4k^2}{4k}$ $S\left(\frac{3}{2k}\middle|\frac{9+4k^2}{4k}\right)$

f) f(x) = ax² + bx + c

f'(x) = 2ax + b

f'(x) = 0

2ax + b = 0 $x = -\frac{b}{2a}$

$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{-b^2+4ac}{4a}$ $S\left(-\frac{b}{2a}\middle|\frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$

5. Aufgabe:

a) $f(x) = \frac{1+x-4x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-1} - 2$

Definitonsmenge: Es liegt ein Bruch vor
$2x^2 = 0$ $x = 0$ $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Tangente:

$f'(x) = -x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-2} = -\frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x^2}$

m = f'(–1) = $-\frac{1}{(-1)^3} - \frac{1}{2(-1)^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

y = f(–1) = $\frac{1-1-4(-1)^2}{2(-1)^2} = \frac{-4}{2} = -2$ P(–1/ –2)

m und die Koordinaten von P werden in die Gleichung y = mx + t eingesetzt, um t zu ermitteln.

$-2 = \frac{1}{2}\cdot(-1) + t$ t = –1,5

Also $y = \frac{1}{2}x - 1{,}5$

b) $f(x) = \frac{x^2+3x-6}{6x^2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}x^{-1} - x^{-2}$

Definitonsmenge: Es liegt ein Bruch vor
$6x^2 = 0$ $x = 0$ $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Tangente:

$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} + 2x^{-3} = -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^3}$

m = f'(1) = $-\frac{1}{2} + 2 = 1{,}5$

y = f(1) = $\frac{1+3-6}{6} = -\frac{1}{3}$ $P\left(1 \middle| -\frac{1}{3}\right)$

m und die Koordinaten von P werden in die Gleichung y = mx + t eingesetzt, um t zu ermitteln.

$-\frac{1}{3} = 1{,}5 \cdot 1 + t$ t = $-1\frac{5}{6}$

Also $y = 1{,}5x - 1\frac{5}{6}$

c) f(x) = $\frac{2-x^2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} = 2x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}$

Definitonsmenge: Es liegen ein Bruch und eine Wurzel vor
W: x ≥ 0
B $\sqrt{x} = 0$ x = 0 D = IR$^+$

Tangente:
$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{3}{2}\sqrt{x}$

m = f'(4) = $-\frac{1}{2\sqrt{4^3}} + \frac{3}{2}\sqrt{4} = \frac{47}{16}$

y = f(4) = $\frac{2-4^2}{\sqrt{4}} = -7$ $P(4|-7)$

m und die Koordinaten von P werden in die Gleichung y = mx + t eingesetzt, um t zu ermitteln.
$-7 = \frac{47}{16}\cdot 4 + t$ t = $-\frac{75}{4} = -18\frac{3}{4}$

Also $y = \frac{47}{16}x - 18\frac{3}{4}$

d) f(x) = $\sqrt{x^3} - x = x^{\frac{3}{2}} - x$ + 2 P(0/ ?)

Definitonsmenge: Es liegt eine Wurzel vor
W: x³ ≥ 0 x ≥ 0 D = IR$_o^+$

Tangente:
$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 1$

m = f'(0) = $\frac{3}{2}\sqrt{0} - 1 = -1$

y = f(0) = 0 $P(0|0)$

m und die Koordinaten von P werden in die Gleichung y = mx + t eingesetzt, um t zu ermitteln.
$0 = 0 + t$ t = 0

Also $y = -x$

6. Aufgabe:

a) f(x) = $\frac{1}{|x+3|} = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & \text{für } x > -3 \\ -\frac{1}{x+3} & \text{für } x < -3 \end{cases}$; $x_o = -3$

Diese Funktion ist an der Stelle xo = -3 nicht definiert und somit ist die Frage nach der Differenzierbarkeit hier unsinnig.

b) f(x) = $\frac{x}{3|x+3|} = \begin{cases} \frac{x}{3(x+3)} & \text{für } [illegible] \\ \frac{x}{-3(x+3)} = [illegible] & \text{für } [illegible] \end{cases}$; $x_o = -3$

[illegible]

f ist nicht differenzierbar an der Stelle $x_o = -3$

c) f(x) = [illegible] $x_o = 3$

[illegible]

f ist nicht differenzierbar an der Stelle $x_o = 3$