**Lösungsblatt Kurvendiskussion**

Geg: f: x $\rightarrow 1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$

**a) Definitionsmenge**

Bruch)

f(x) = $\frac{x^2-2x+1}{x^2}$

$x^2 = 0$

$x_{1/2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D_f = IR\backslash\{0\}}$

SP mit x-Achse

f(x) = 0

$x^2-2x+1=0$

1. Vieta:

$x^2-2x+1=0$

(x-1) (x-1) = 0

$x_{1/2}$ = 1 (doppelte Nst

$\Rightarrow$ Berührungspunkt)

**$N_1$ (1/0)**

Alternative: Formel:

$x_{1/2} = \frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}$

$x_{1/2} = 1$

SP mit y-Achse

x = 0 $\notin$ D $\Rightarrow$ **Kein Schnittpunkt mit der y-Achse** vorhanden

**b) Grenzverhalten**

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2} = 1$ $\Rightarrow$ **horizontale Asymptote: y = 1**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{x^2-2x+1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_-} \frac{x^2-2x+1}{x^2} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \textbf{vertikale Asymptote: x = 0}$$

**c) Monotonieverhalten und Extrema**

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(2x-2) - (x^2 - 2x + 1)2x}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^2 - 2x^3 + 4x^2 - 2x}{x^4} = \frac{2x^2 - 2x}{x^4} = \frac{2x-2}{x^3} =$$

$$= \frac{2(x-1)}{x^3}$$

Stelle mit waagrechter Tangente

f'(x) = 0
2x -2 = 0
**$x_1 = 1$ $y_1 = f(1) = 0$**

Tabelle

| **x** | - ∞ < **x** < | 0 (n.d) < **x** < | 1 < **x** < ∞ |
|---|---|---|---|
| **2** | + | + | + |
| **x-1** | - | - | + |
| **$x^3$** | - | + | + |
| f'(x) | + | **-** | + |

Max (0 nicht definiert!) **Min**

Monotoniebereiche:

f ist streng monoton zunehmend für x ∈ $]-\infty;0[$
f ist streng monoton abnehmend für x ∈ $]0;1]$
f ist streng monoton zunehmend für x ∈ $[1;\infty[$

Alternative: Zweite Ableitung

$$f'(x) = \frac{2x-2}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{x^3 \cdot 2 - (2x-2)3x^2}{x^6} = \frac{2x^3 - 6x^3 + 6x^2}{x^6} = \frac{-4x^3 + 6x^2}{x^6} = \frac{-4x+6}{x^4} = \frac{-2(2x-3)}{x^4}$$

$f''(x_1) = f''(1) = \frac{-4(1)+6}{1^4} = 2$ ; $2 > 0$ $\Rightarrow$ **Tiefpunkt T(1/0)**

## d) Wendepunkt und Krümmungsverhalten

### Wendepunkt

f''(x) = 0

-4x + 6 = 0

$x_1 = \frac{3}{2}$ $\quad y_1 = f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{9}$

$f'''(x) = \dfrac{x^4(-4) - (-4x+6)4x^3}{x^8}$

$f'''(x) = \dfrac{-4x^4 + 16x^4 - 24x^3}{x^8}$

$f'''(x) = \dfrac{12x^4 - 24x^3}{x^8}$

$f'''(x) = \dfrac{12x - 24}{x^5}$

$f'''(\frac{3}{2}) = -\frac{64}{81} \Rightarrow \neq 0 \Rightarrow$ **Wendepunkt W($\frac{3}{2}$/$\frac{1}{9}$)**

### Krümmungsverhalten

| **x** | | 0 (n.d) | | $\frac{3}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **- ∞< x <** | | **< x <** | | **< x < ∞** |
| **-2** | - | | - | | - |
| **2x-3** | - | | - | | + |
| **$x^4$** | + | | + | | + |
| f''(x) | + | | + | | - |
| | *links gek.* | | *links gek.* | | *rechts gek.* |

$G_f$ ist linksgekrümmt für x $\in \left]-\infty;0\right[$

$G_f$ ist linksgekrümmt für x $\in \left]0;\frac{3}{2}\right]$

$G_f$ ist rechtsgekrümmt für x $\in \left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

### Wendetangente

$x_0 = \frac{3}{2}$ $\quad f(x_0) = \frac{1}{9}$ $\quad f'(x_0) = \dfrac{2(\frac{2}{3}) - 2}{(\frac{2}{3})^3} = \frac{8}{27}$

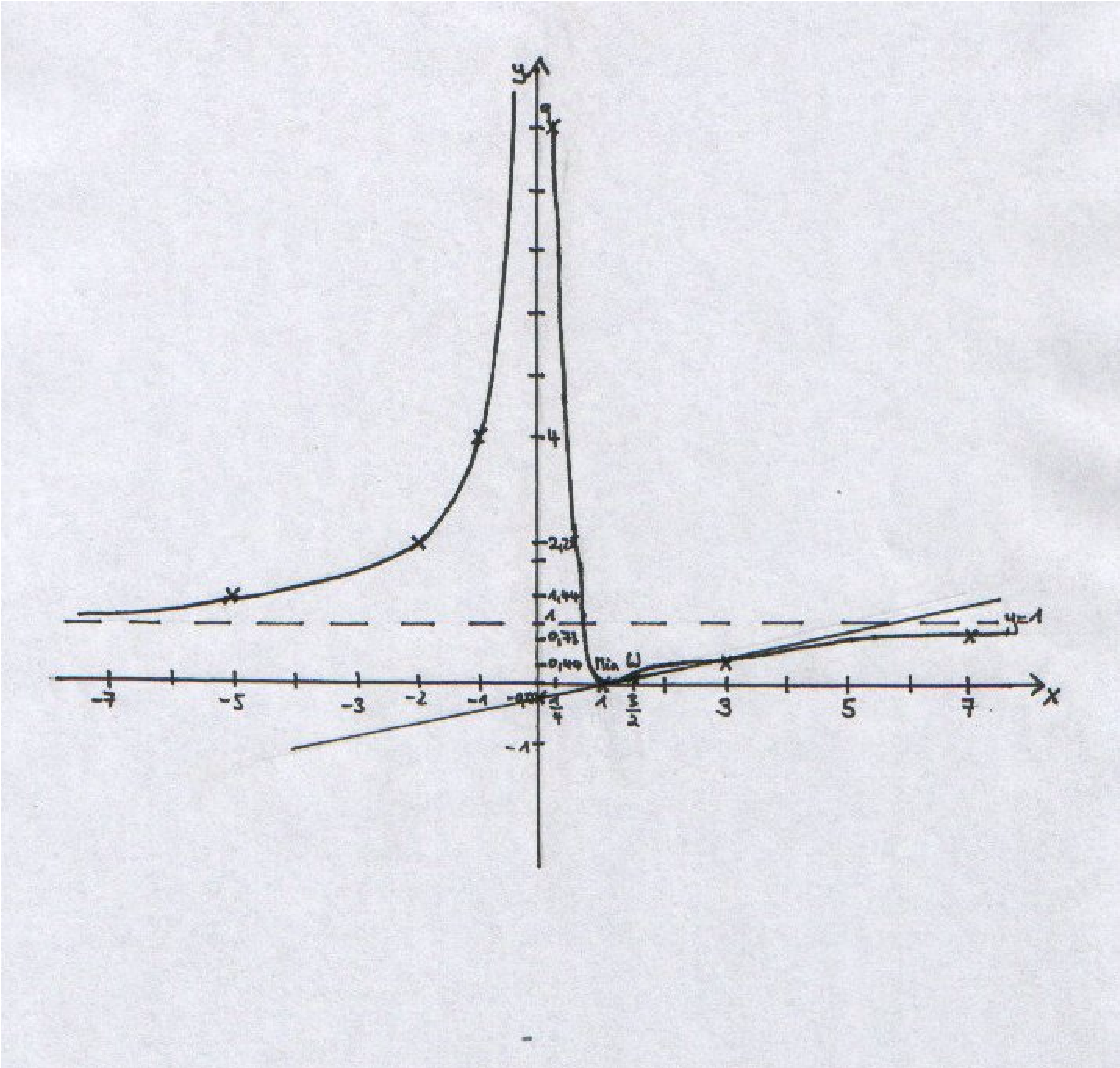
$y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$

$y = \frac{8}{27}(x - \frac{3}{2}) + \frac{1}{9}$

$y = \frac{8}{27}x - \frac{1}{3}$

**e) Graph**

| x | **-5** | **-2** | **-1** | $\frac{1}{4}$ | **3** | **7** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | $\frac{36}{25}$ **= 1,44** | $\frac{9}{4}$ **= 2,25** | **4** | **9** | $\frac{4}{9}$ **= 0,44** | $\frac{36}{49}$ **= 0,73** |



**f) Stammfunktion**

$g: x \to 1 - \frac{1}{x^2}$

$G(x) = \int (1 - \frac{1}{x^2})dx = \int (1 - x^{-2})dx$

$G(x) = x - \frac{x^{-1}}{-1} + C$

$G(x) = x + \frac{1}{x} + C \quad = \frac{x^2+1}{x} + C$

**g) Nullstellen**

Bed.) $g(x) = 0$

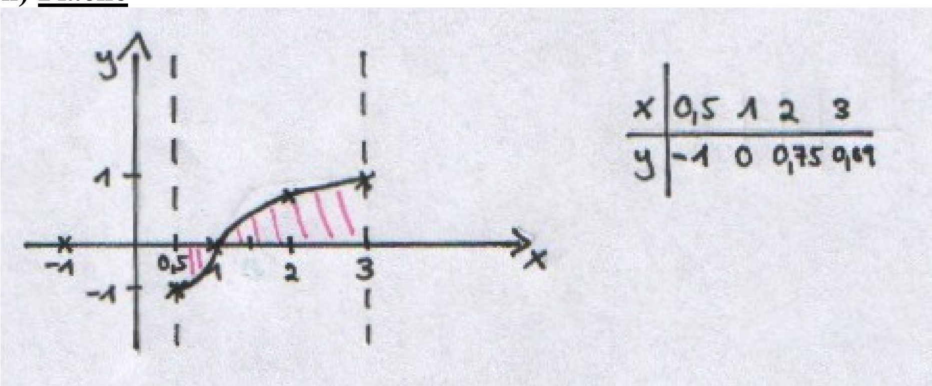
$1 - \frac{1}{x^2} = 0$

$\frac{1}{x^2} = 1$

$x^2 = 1$

$x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N_1(1/0) \quad N_2(-1/0)}$

**h) Fläche**




$$A = \left| \int_{0,5}^{1} (1 - \frac{1}{x^2})dx \right| + \left| \int_{1}^{3} (1 - \frac{1}{x^2})dx \right|$$

$$A = \left| \left[ \frac{x^2+1}{x} \right]_{0,5}^{1} \right| + \left| \left[ \frac{x^2+1}{x} \right]_{1}^{3} \right|$$

$$A = \left| \left( \frac{1^2+1}{1} \right) - \left( \frac{(0,5)^2+1}{0,5} \right) \right| + \left| \left( \frac{3^2+1}{3} \right) - \left( \frac{1^2+1}{1} \right) \right|$$

$$A = |2 - 2,5| + \left| \frac{10}{3} - 2 \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| + \left| \frac{4}{3} \right| = \frac{11}{6}$$