1. $f(x) = \frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{x(x-2)+x(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x^2}{x^2-4}$

a) Definitionsmenge: $(x+2)(x-2) = 0$; **D = IR \{-2; 2}**

b) SP mit x-Achse: $f(x) = 0$; $x = 0$ **N(0/0)**

SP mit y-Achse: Siehe oben: **S_y(0/0)**

c) Symmetrie: $f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2-4} = \frac{2x^2}{x^2-4} = f(x)$ **G achsensymm. zum Ursprung**

2 $f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-2x+1}{x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$

a) Definitionsmenge: $x^2 = 0$; **D = IR \{0}**

b) SP mit x-Achse: $f(x) = 0$; $x = 1$ **N(1/0)**

c) SP mit y-Achse: Da $0 \notin D$, **kein SP vorhanden**

3. $f(x) = \frac{2x^3+2}{x^2}$

a) Definitionsmenge: $x^2 = 0$; **D = IR \{0}**

b) SP mit x-Achse: $f(x) = 0$; $x^3 = -1$; $x = -1$ **N(-1/0)**

c) SP mit y-Achse: Da $0 \notin D$, **kein SP vorhanden**

4. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

a) Definitionsmenge: $x + 1 = 0$; **D = IR \{-1}**

b) SP mit x-Achse: $f(x) = 0$; $x = 0$ **N(0/0)**

c) SP mit y-Achse: Siehe oben: **S_y(0/0)**

5. $f(x) = \frac{x^2-2}{(x+2)^2}$

a) Definitionsmenge: $(x+2)^2 = 0$; **D = IR \{-2}**

b) SP mit x-Achse: $f(x) = 0$; $x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$ **$N_1(-\sqrt{2}$ /0)** **N_2(**$\sqrt{2}$ /0)

c) SP mit y-Achse: $f(0) = \frac{-2}{2^2} = -\frac{1}{2}$: **S_y(0/-0,5)**

6. $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 6x}{x^2 + x - 2} = \dfrac{x(x-3)(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{x(x-3)}{x-1} = \dfrac{x^2 - 3x}{x-1}$

a) <u>Definitionsmenge:</u> $x^2 + x - 2 = 0$ $x_1 = -2; x_2 = 1$ **D = IR \{-2; 1}**

b) <u>SP mit x-Achse:</u> $f(x) = 0;$

$x^3 - x^2 - 6x = 0$

$x(x^2 - x - 6) = 0$

$x_1 = 0;\; x^2 - x - 6 = 0;\; x_2 = 3;\; (x_3 = -2 \notin D)$ **$N_1(0/0)$ $N_2(3/0)$**

c) <u>SP mit y-Achse:</u> Siehe oben: **$S_y(0/0)$**

7. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

a) <u>Definitionsmenge:</u> $\dfrac{x}{x+1} \geq 0$

$(x \geq 0 \wedge x + 1 > 0) \vee (x \leq 0 \wedge x + 1 < 0)$

$(x \geq 0 \wedge x > -1) \vee (x \leq 0 \wedge x < -1)$

$D_1 = [0; \infty[$ $D_2 =]-\infty; -1[$ **D = IR\[–1; 0[**

b) <u>SP mit x-Achse:</u> $f(x) = 0;\; x = 0$ **N(0/0)**

c) <u>SP mit y-Achse:</u> Siehe oben: **$S_y(0/0)$**

8. $f(x) = \log_2\left(\dfrac{6-2x}{x-1}\right)$

a) <u>Definitionsmenge:</u> $\dfrac{6-2x}{x-1} > 0$

$(6 - 2x > 0 \wedge x - 1 > 0) \vee (6 - 2x < 0 \wedge x - 1 < 0)$

$(6 > 2x \wedge x > 1) \vee (6 < 2x \wedge x < 1)$

$(3 > x \wedge x > 1) \vee (3 < x \wedge x < 1)$

$(x < 3 \wedge x > 1) \vee (x > 3 \wedge x < 1)$

$D_1 =]1; 3[$ $D_2 = \{\}$ **D =]1; 3[**

b) <u>SP mit x-Achse:</u> $f(x) = 0;$

$\dfrac{6-2x}{x-1} = 1$

$6 - 2x = x - 1$

$7 = 3x;$ $x = 7/3$ **N($\frac{7}{3}$/0)**

c) <u>SP mit y-Achse:</u> Da $0 \notin D$, **kein SP vorhanden**

9. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1} \cdot \log_3(x+1)}$

a) Definitionsmenge: B: $\sqrt{x+1} \cdot \log_3(x+1) = 0$

Einer der Faktoren muss Null sein:

$\sqrt{x+1} = 0$ oder: $\log_3(x + 1) = 0$

$x + 1 = 0$ $x + 1 = 1$

$\mathbf{x_1 = -1}$ $\mathbf{x_2 = 0}$

W: $x + 1 \geq 0$

$\mathbf{x \geq -1}$

L: $x + 1 > 0$

$\mathbf{x > -1}$

D =]–1; ∞ [\ {0}

b) SP mit x-Achse: $f(x) = 0$;

$x^2 = 0$

$x = 0$ **N(0/0)**

c) SP mit y-Achse: Siehe oben: **S_y(0/0)**

10. a) $f(x) = 3 - 2x$ $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$

$f(x_2) - f(x_1) = 3 - 2x_2 - (3 - 2x_1) = 3 - 2x_2 - 3 + 2x_1 = -2(x_2 - x_1) < 0$

f ist streng monoton abnehmend.

b) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ (für $x \geq 2$) $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$

$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - 4x_2 + 2 - (x_1^2 - 4x_1 + 2) = x_2^2 - x_1^2 - 4(x_2 - x_1) =$

$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 4(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 4) > 0$

f ist streng monoton zunehmend.

c) $f(x) = 4x^2 + 8x - 7$ (für $x \geq -1$) $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$

$f(x_2) - f(x_1) = 4x_2^2 + 8x_2 - 7 - (4x_1^2 + 8x_1 - 7) = 4(x_2^2 - x_1^2) + 8(x_2 - x_1) =$

$4(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + 8(x_2 - x_1) = 4(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 8) > 0$

f ist streng monoton zunehmend.

d) $f(x) = 5 + 8x$

$f(x_2) - f(x_1) = 5 + 8x_2 - (5 + 8x_1) = = 8(x_2 - x_1) > 0$

f ist streng monoton zunehmend.

e) $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ (für $x \geq 2$) $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$

$f(x_2) - f(x_1) = -x_2^2 + 4x_2 + 2 - (-x_1^2 + 4x_1 + 2) = -x_2^2 + x_1^2 + 4(x_2 - x_1) =$

$= -x_2^2 + x_1^2 - 4(x_2 - x_1) = -(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + 4(x_2 - x_1) =$

$= (x_2 - x_1)(-x_2 - x_1 + 4) < 0$

f ist streng monoton abnehmend.

e) f) $f(x) = x^2 - 8x - 7$ (für $x \leq 4$) $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$

$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - 8x_2 - 2 - (x_1^2 - 8x_1 - 2) = x_2^2 - x_1^2 - 8(x_2 - x_1) =$

$= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 8(x_2 - x_1) =$

$= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 8) > 0$

f ist streng monoton zunehmend.

11. Bestimme die Schnittpunkte der Graphen der Funktionen f und g mit

a) $f(x) = g(x)$

$3 - x = x^2 + 1$

$x^2 + x - 2 = 0$

Lösungsformel ergibt:

$x_1 = 1$ $y_1 = 3 - 1 = 2$ **$S_1(1/2)$**

$x_2 = -2$ $y_2 = 3 - (-2) = 5$ **$S_2(-2/5)$**

b) $f(x) = g(x)$

$5x + 3 = -x + 9$

$6x = 6$

$x = 1$; $y = -1 + 9 = 8$ **$S(1/8)$**

c) $f(x) = g(x)$

$x + 6 = x^2 - 2x + 1 + 5$

$x + 6 = x^2 - 2x + 6$

$0 = x^2 - 3x$

$x(x - 3) = 0$

$x_1 = 0$ $y_1 = 0 + 6 = 6$ **$S_1(0/6)$**

$x_2 = 3$ $y_2 = 3 + 6 = 9$ **$S_2(3/9)$**

d) $f(x) = g(x)$

$2x + 1 = x^2 + 2$

$0 = x^2 - 2x + 1$

$x = 1$ $y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ **$S(1/3)$**

e) $f(x) = g(x)$

$3 - (x + 1)^2 = 2x + 5$

$3 - (x^2 + 2x + 1) = 2x + 5$

$3 - x^2 - 2x - 1 = 2x + 5$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$x_1 = -3$ $y_1 = 2\cdot(-3) + 5 = -1$ **$S_1(-3/-1)$**

$x_2 = -1$ $y_2 = 2\cdot(-1) + 5 = 3$ **$S_2(-1/3)$**

f) $f(x) = g(x)$

$x^2 + 3 = - x^2 + 2x + 3$

$2x^2 - 2x = 0$

$2x(x - 1) = 0$

$x_1 = 0$; $y_1 = 0^2+3 = 3$ **S_1 (0/3)**

$x_1 = 1$; $y_1 = 1^2+3 = 4$ **S_1 (1/4)**

12. Untersuche die Graphen der Schar f_k auf gemeinsame Punkte

a) $f_k(x) = 7x + k$

$f_m(x) = 7x + m$ $m \neq k$

$f_m(x) = f_k(x)$

$7x + m = 7x + k$

$m = k$ Widerspruch $\Rightarrow$ **keine gemeinsamen Punkte**

b) $f_k(x) = (k - 1)x + 4$

$f_m(x) = (m - 1)x + 4$ $m \neq k$

$f_m(x) = f_k(x)$

$(m - 1)x + 4 = (k - 1)x + 4$

$mx - x + 4 = kx - x + 4$

$mx - kx = 0$

$x(m-k) = 0$

$x = 0$ $y = (k - 1)\cdot 0 + 4 = 4$ **S(0/4)**

c) $f_k(x) = x - kx + k$

$f_m(x) = x - mx + m$ $m \neq k$

$f_m(x) = f_k(x)$

$x - mx + m = x - kx + k$

$kx - mx + m - k = 0$

$x(k - m) - (k - m) = 0$

$(k - m)(x - 1) = 0$

$x - 1 = 0$

$x = 1$ $y = 1 - k\cdot 1 + k = 1$ **S(1/1)**

© H. Drothler 2008

d) $f_k(x) = kx + 3 - 2k$

$f_m(x) = m + 3 - 2m \qquad m \neq k$

$f_m(x) = f_k(x)$

$kx + 3 - 2k = mx + 3 - 2m$

$kx - mx - 2k + 2m = 0$

$x(k - m) - 2(k - m) = 0$

$(k - m)(x - 2) = 0$

$x - 2 = 0$

$x = 2 \qquad y = 2k + 3 - 2k = 3 \qquad$ **S(2/3)**

© H. Drothler 2008