1. Aufgabe *Differentialquotient*

a) $\lim\limits_{x\to -2^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2^{\pm}} \dfrac{-x^2-4}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2^{\pm}} \dfrac{-(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2^{\pm}} \left[-(x-2)\right] = 4$

b) $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^{\pm}} \dfrac{2x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^{\pm}} \dfrac{2(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to -1^{\pm}} 2 = 2$

c) $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^{\pm}} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^{\pm}} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^{\pm}} (x+1) = 2$

d) $\lim\limits_{x\to 2^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^{\pm}} \dfrac{2-3x^2-(2-3\cdot 2^2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^{\pm}} \dfrac{-3x^2+12}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^{\pm}} \dfrac{-3(x-2)(x+2)}{x-2} =$

$= \lim\limits_{x\to 2^{\pm}} [-3(x+2)] = -12$

e) $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^{\pm}} \dfrac{2x-x^2-(2\cdot 1-1^2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^{\pm}} \dfrac{2x-x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^{\pm}} \dfrac{-(x^2-2x+1)}{x-1} =$

$\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} \dfrac{-(x-1)^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^{\pm}} [-(x-1)] = 0$

f) $\lim\limits_{x\to -2^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2^{\pm}} \dfrac{x^2-3x-[(-2)^2-3\cdot(-2)]}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2^{\pm}} \dfrac{x^2-3x-10}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2^{\pm}} \dfrac{(x-5)(x+2)}{x+2} =$

$= \lim\limits_{x\to -2^{\pm}} (x-5) = -3$

g) $\lim\limits_{x\to x_o^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim\limits_{x\to x_o^{\pm}} \dfrac{x-x^2-x_o+x_o^2}{x-x_o} = \lim\limits_{x\to x_o^{\pm}} \dfrac{-x^2+x_o^2+x-x_o}{x-x_o} = \lim\limits_{x\to x_o^{\pm}} \dfrac{-(x^2-x_o^2)+(x-x_o)}{x-x_o}$

$= \lim\limits_{x\to x_o^{\pm}} \dfrac{-(x-x_o)(x+x_o)+(x-x_o)}{x-x_o} = \lim\limits_{x\to x_o^{\pm}} \dfrac{(x-x_o)[-(x+x_o)+1]}{x-x_o} = \lim\limits_{x\to x_o^{\pm}} [-(x+x_o)+1] = -2x_o+1$

h) $\lim\limits_{x\to x_o^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim\limits_{x\to x_o^{\pm}} \dfrac{2-2x^2-2+2x_o^2}{x-x_o} = \lim\limits_{x\to x_o^{\pm}} \dfrac{-2(x^2-x_o^2)}{x-x_o} = \lim\limits_{x\to x_o^{\pm}} \dfrac{-2(x-x_o)(x+x_o)}{x-x_o} =$

$\lim\limits_{x\to x_o^{\pm}} [-2(x+x_o)] = -4x_o$

2. Aufgabe *Differenzierbar?*

Untersuche mit dem Differentialquotienten die folgenden Funktionen $f\colon x \mapsto f(x)$ auf Differenzierbarkeit an der Stelle x_0 und bestimme ggf. $f'(x_0)$.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x-6 & \text{für } x \ge 3 \\ -(2x-6) = -2x+6 & \text{für } x < 3 \end{cases}$; $\qquad 2x-6 \ge 0 \Rightarrow x \ge 3$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{2x-6-(2\cdot 3-6)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{2x-6}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{2(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} 2 = 2$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-2x+6-(2\cdot 3-6)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-2x+6}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{-2(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} (-2) = -2$$

f ist nicht differenzierbar an der angegebenen Stelle.

b) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{für } x \ge 1 \\ -(x-1) = -x+1 & \text{für } x < 1 \end{cases}$ $\qquad x-1 \ge 0 \Rightarrow x \ge 1$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1-(1-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x+1-(1-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} \lim_{x\to 1^-} (-1) = -1$$

f ist nicht differenzierbar an der angegebenen Stelle.

c) $f(x) = \begin{cases} 4x-2 & \text{für } x \ge 0{,}5 \\ -(4x-2) = -4x+2 & \text{für } x < 0{,}5 \end{cases}$ $\qquad 4x-2 \ge 0 \Rightarrow x \ge 0{,}5$

$$\lim_{x\to 0{,}5^+} \frac{f(x)-f(0{,}5)}{x-0{,}5} = \lim_{x\to 0{,}5^+} \frac{4x-2-(4\cdot 0{,}5-2)}{x-0{,}5} = \lim_{x\to 0{,}5^+} \frac{4x-2}{x-0{,}5} = \lim_{x\to 0{,}5^+} \frac{4(x-0{,}5)}{x-0{,}5} \lim_{x\to 0{,}5^+} 4 = 4$$

$$\lim_{x\to 0{,}5^-} \frac{f(x)-f(0{,}5)}{x-0{,}5} = \lim_{x\to 0{,}5^-} \frac{-4x+2-(4\cdot 0{,}5-2)}{x-0{,}5} = \lim_{x\to 0{,}5^-} \frac{-4x+2}{x-0{,}5} = \lim_{x\to 0{,}5^-} \frac{-4(x-0{,}5)}{x-0{,}5} \lim_{x\to 0{,}5^-} (-4) = -4$$

f ist nicht differenzierbar an der angegebenen Stelle

d) $f(x) = \begin{cases} 3-2x = -2x+3 & \text{für } x \le 1{,}5 \\ -(3-2x) = 2x-3 & \text{für } x > 1{,}5 \end{cases}$ $\qquad 3-2x \ge 0 \Rightarrow x \le 1{,}5$

$$\lim_{x\to 1{,}5^-} \frac{f(x)-f(1{,}5)}{x-1{,}5} = \lim_{x\to 1{,}5^-} \frac{3-2x-(-2\cdot 1{,}5+3)}{x-1{,}5} = \lim_{x\to 1{,}5^-} \frac{3-2x}{x-1{,}5} = \lim_{x\to 1{,}5^-} \frac{-2(x-1{,}5)}{x-1{,}5} = \lim_{x\to 1{,}5^-} (-2) = -2$$

$$\lim_{x\to 1{,}5^+} \frac{f(x)-f(1{,}5)}{x-1{,}5} = \lim_{x\to 1{,}5^+} \frac{2x-3-(-2\cdot 1{,}5+3)}{x-1{,}5} = \lim_{x\to 1{,}5^+} \frac{2x-3}{x-1{,}5} = \lim_{x\to 1{,}5^+} \frac{2(x-1{,}5)}{x-1{,}5} \lim_{x\to 1{,}5^+} 2 = 2$$

f ist nicht differenzierbar an der angegebenen Stelle.

e) $f(x) = \begin{cases} 4-8x = -8x+4 & \textit{für } x \le 0{,}5 \\ -(4-8x) = 8x-4 & \textit{für } x > 0{,}5 \end{cases}$ $\quad 4 - 8x \ge 0 \Rightarrow x \le 0{,}5$

$$\lim_{x\to 0{,}5^-} \frac{f(x)-f(0{,}5)}{x-0{,}5} = \lim_{x\to 0{,}5^-} \frac{-8x+4-(-8\cdot 0{,}5+4)}{x-0{,}5} = \lim_{x\to 0{,}5^-} \frac{-8x+4}{x-0{,}5} = \lim_{x\to 0{,}5^-} \frac{-8(x-0{,}5)}{x-0{,}5} \lim_{x\to 0{,}5^-} (-8) = -8$$

$$\lim_{x\to 0{,}5^+} \frac{f(x)-f(0{,}5)}{x-0{,}5} = \lim_{x\to 0{,}5^+} \frac{8x-4-(-8\cdot 0{,}5+4)}{x-0{,}5} = \lim_{x\to 0{,}5^+} \frac{8x-4}{x-0{,}5} = \lim_{x\to 0{,}5^+} \frac{8(x-0{,}5)}{x-0{,}5} = \lim_{x\to 0{,}5^+} 8 = 8$$

f ist nicht differenzierbar an der angegebenen Stelle.

f) $f(x) = \begin{cases} 9-3x = -3x+9 & \textit{für } x \le 3 \\ -(9-3x) = 3x-9 & \textit{für } x > 3 \end{cases}$ $\quad 9 - 3x \ge 0 \Rightarrow x \le 3$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-3x+9-(-3\cdot 3+9)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-3x+9}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-3(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} (-3) = -3$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{3x-9-(-3\cdot 3+9)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{3x-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{3(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} 3 = 3$$

f ist nicht differenzierbar an der angegebenen Stelle.

g) $f(x) = \begin{cases} 2-(3-x) = x-1 & \textit{für } x \le 3 \\ 2+(3-x) = -x+5 & \textit{für } x > 3 \end{cases}$ $\quad 3 - x \ge 0 \Rightarrow x \le 3$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x-1-(3-1)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{-x+5-(3-1)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{-x+3}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{-(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} (-1) = -1$$

f ist nicht differenzierbar an der angegebenen Stelle.

h) $f(x) = \begin{cases} 2-2(2x-4) = -4x+10 & \textit{für } x \ge 2 \\ 2+2(2x-4) = 4x-6 & \textit{für } x < 2 \end{cases}$ $\quad 2x - 4 \ge 0 \Rightarrow x \ge 2$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{4x-6-(-4\cdot 2+10)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{4x-8}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{4(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} 4 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-4x+10-(-4\cdot 2+10)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-4x+8}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-4(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} (-4) = -4$$

f ist nicht differenzierbar an der angegebenen Stelle.

i) $f(x)=\begin{cases} 3-5x=-5x+3 & \text{für } x\geq 0 \\ 3-(-5x)=5x+3 & \text{für } x<0 \end{cases}$ 5x $\geq 0 \Rightarrow$ x ≥ 0

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-5x+3-3}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-5x}{x}=\lim_{x\to 0^+}(-5)=-5$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{5x+3-(-5\cdot 0+3)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{5x}{x}=\lim_{x\to 0^-}5=5$$

f ist nicht differenzierbar an der angegebenen Stelle.

j) $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{für } x<2 \\ x^2 & \text{für } x\geq 2 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2x-3-2^2}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2x-7}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2(x-3{,}5)}{x-2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-2^2}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}(x+2)=4$$

f ist nicht differenzierbar an der angegebenen Stelle.

k) $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & \text{für } x<2 \\ 4x-6 & \text{für } x\geq 2 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{4x-6-(4\cdot 2-6)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{4x-8}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{4(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}4=4$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-2-(4\cdot 2-6)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(x+2)=4$$

f ist differenzierbar an der angegebenen Stelle.

3. Aufgabe *Definitionsmenge*

Bestimme die Definitionsmenge folgender Funktionen f mit $f\colon x \mapsto f(x)$.

a) W: $3 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1{,}5$
$D =]-\infty; 1.5]$

b) W: $5 + 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 2{,}5$
$D = [2{,}5; \infty[$

c) L: $3x - 9 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$
$D =]3; \infty[$

d) B: $x^2 + 7x + 12 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = -3; x_2 = -4$
$D = \mathbb{R}\backslash\{-4; -3\}$

e) B: $x^3 - 12x^2 + 32x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 12x + 32) = 0$
$\Rightarrow x(x-4)(x-8) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 4; x_2 = 8$
$D = \mathbb{R}\backslash\{0; 4; 8\}$

f) B: $2x^2 + 4x = 0 \Rightarrow 2x(x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = -2$
$D = \mathbb{R}\backslash\{-2; 0\}$

g) W: $4x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -0{,}5$
B: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$;
$D = [-0{,}5; \infty[\ \backslash\{1\}$

h) L: $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$
B: $3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$
$D =]1; \infty[\ \backslash\{\frac{2}{3}\}$

i) W: $6x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{3}$
B: $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$;
$D = [\frac{1}{3}; \infty[\ \backslash\{5\}$

4. Aufgabe *h-Methode*

Bestimme die Grenzwerte mit der h-Methode

a) $$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2+4x-6}{x-1}=\lim_{h\to 0}\frac{2(1-h)^2+4(1-h)-6}{1-h-1}=\lim_{h\to 0}\frac{2(1-2h+h^2)+4-4h-6}{-h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2-4h+2h^2+4-4h-6}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2-8h}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2h-8)}{-h}=\lim_{h\to 0}[-(2h-8)]=8$$

b) $$\lim_{x\to -2^-}\frac{2x+3}{x+2}=\lim_{h\to 0}\frac{2(-2-h)+3}{-2-h+2}=\lim_{h\to 0}\frac{2(-2-h)+3}{-2-h+2}=\lim_{h\to 0}\frac{-4-2h+3}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1-2h}{-h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2(h+0{,}5)}{-h}=+\infty$$

c) $$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-3x}{x-3}=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3(3+h)}{3+h-3}=\lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2-9-3h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h+h^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(3+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(3+h)=3$$

d) $$\lim_{x\to x_o^+}\frac{x^2-x_o^2}{x-x_o}=\lim_{h\to 0}\frac{(x_o+h)^2-x_o^2}{x_o+h-x_o}=\lim_{h\to 0}\frac{x_o^2+2x_oh+h^2-x_o^2}{+h}=\lim_{h\to 0}\frac{2x_oh+h^2}{+h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x_o+h)}{+h}=\lim_{h\to 0}(2x_o+h)=2x_o$$

5. Aufgabe *Funktionen*

a) $f(x) = -\frac{4}{x} + 2x + 2 = \frac{-4 + 2x^2 + 2x}{x} = \frac{2x^2 + 2x - 4}{x}$

Definitionsmenge (Bruch: Nenner Null setzen)

$x = 0$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

SP mit x-Achse (Funktionsterm Null setzen | Bei einem Bruch also den Zähler)

$2x^2 + 2x - 4 = 0$

$2(x^2 + x - 2) = 0$

$2(x + 2)(x - 1) = 0$

$x_1 = -2;$ $x_2 = 1$ $N_1(-2|0)$ $N_2(1|0)$

SP mit y-Achse (In Funktionsterm Null einsetzen)

Keiner vorhanden, da $0 \notin D$

Grenzverhalten und Asymptoten (Bei x→Zahl: Faktorisierung)

▶ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(-\frac{4}{x} + 2x + 2 \right) = \pm\infty$

⇒ schräge Asymptote: $y = 2x + 2$

(Zählergrad größer als Nennergrad | „Polynomdividierten“ Term verwenden | Bruch geht gegen Null)

▶ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\overset{+}{2}(\overset{+}{x + 2})(\overset{-}{x - 1})}{\underset{+}{x}} = -\infty$

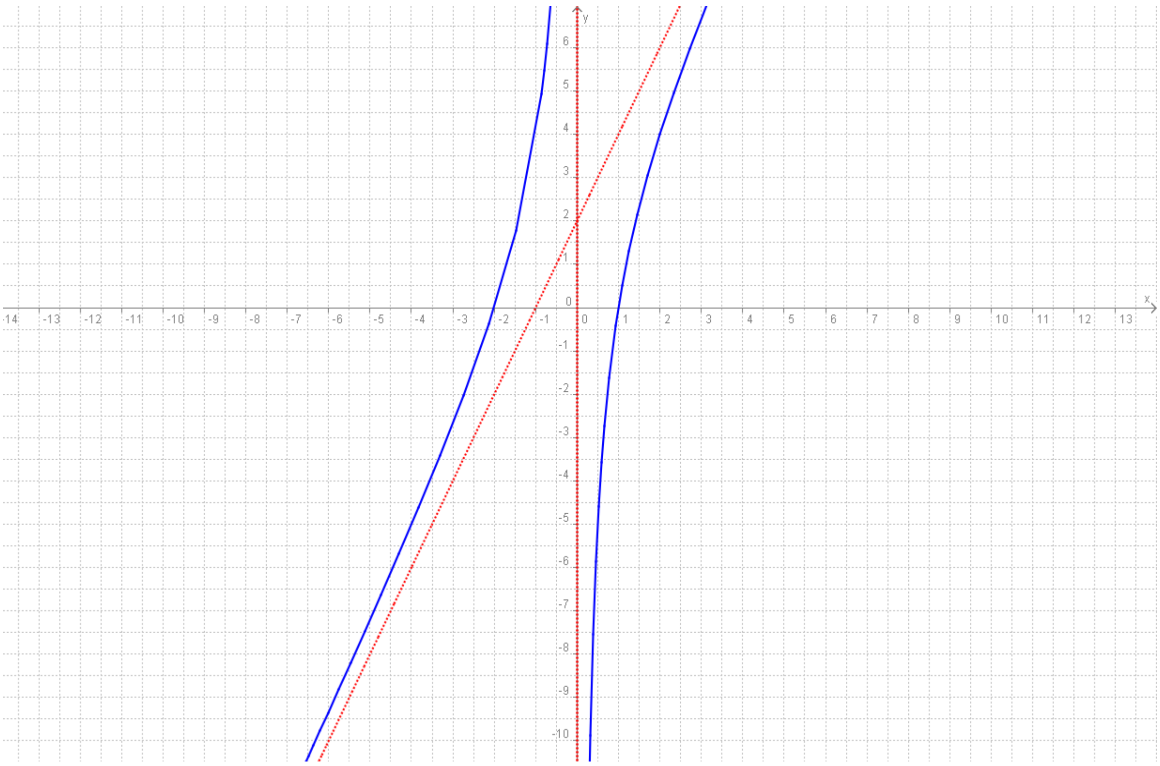
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\overset{+}{2}(\overset{+}{x + 2})(\overset{-}{x - 1})}{\underset{-}{x}} = +\infty$ ⇒ vertikale Asymptote: $x = 0$

Ableitung

$f(x) = -\frac{4}{x} + 2x + 2 = -4x^{-1} + 2x + 2$

$f'(x) = 4x^{-2} + 2 = \frac{4}{x^2} + 2 = \frac{4 + 2x^2}{x^2}$

Graph



b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 - 8x}$

Definitionsmenge (Bruch: Nenner Null setzen)

$2x^2 - 8x = 0$

$2x(x - 4) = 0$ $x_1 = 0;$ $x_2 = 2$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$

SP mit x-Achse (Funktionsterm Null setzen | Bei einem Bruch also den Zähler)

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x + 1)(x - 4) = 0$

$x_1 = -1;$ $N(-1|0)$

$(x_2 = 4 \notin D)$

SP mit y-Achse (In Funktionsterm Null einsetzen)

Keiner vorhanden, da $0 \notin D$

Grenzverhalten und Asymptoten (Bei x→Zahl: Faktorisierung)

► $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3x-4}{2x^2-8x} = \frac{1}{2}$ (Zählergrad und Nennergrad sind gleich groß)

$\Rightarrow$ horizontale Asymptote: $y = \frac{1}{2}$

► $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\overset{-}{(x-4)}\overset{+}{(x+1)}}{\underset{+}{2x}\underset{-}{(x-4)}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\overset{-}{(x-4)}\overset{+}{(x+1)}}{\underset{-}{2x}\underset{-}{(x-4)}} = -\infty$

$\Rightarrow$ vertikale Asymptote: x = 0

► $\lim\limits_{x\to 4^\pm} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^\pm} \frac{(x-4)(x+1)}{2x(x-4)} = \lim\limits_{x\to 4^\pm} \frac{x+1}{2x} = \frac{5}{8}$ Loch: L(4| $\frac{5}{8}$)

Graph

c) $f(x) = \frac{3x}{1-x}$

Definitionsmenge (Bruch: Nenner Null setzen)

1 – x = 0

x = 1 $x_1 = 1$ $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

SP mit x-Achse (Funktionsterm Null setzen | Bei einem Bruch also den Zähler)

3x = 0

x = 0 N(0|0) (auch SP mit y-Achse)

Grenzverhalten und Asymptoten (Bei x→Zahl: Faktorisierung)

▶ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{1-x} = -3$ (Zählergrad und Nennergrad sind gleich groß)

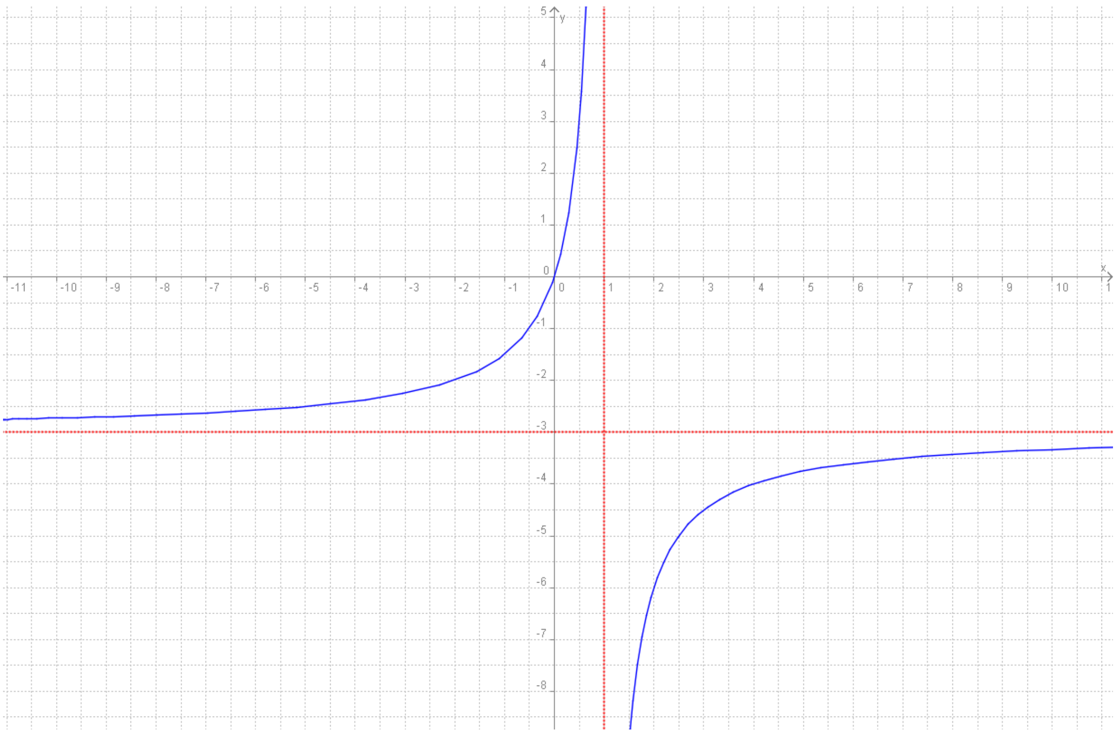
$\Rightarrow$ horizontale Asymptote: $y = -3$

▶ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\overset{+\,+}{3x}}{\underset{+}{1-x}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\overset{+\,+}{3x}}{\underset{-}{1-x}} = -\infty$

$\Rightarrow$ vertikale Asymptote: $x = 1$

Graph



6. Aufgabe *Ableitungsfunktionen*

Bestimme die Terme $f'(x)$ der Ableitungsfunktion folgender Funktionen $f\colon x \mapsto f(x)$.

a) $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$

$f'(x) = 6x + 5$

b) $f(x) = -4x^3 + 5x^2 + 71$

$f'(x) = -12x^2 + 10x$

c) $f(x) = x(x^2 + 3x) = x^3 + 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

d) $f(x) = (x + 1)(x - 3) + \dfrac{5}{x} = x^2 - 2x - 3 + 5x^{-1}$

$f'(x) = 2x - 2 - 5x^{-2} = 2x - 2 - \dfrac{5}{x^2}$

e) $f(x) = (x + 1)(x - 2) + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} = x^2 - x - 2 + 2x^{-1} - x^{-2}$

$f'(x) = 2x - 1 - 2x^{-2} + 2x^{-3} = 2x - 1 - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}$