Aufgabe I

a) $f'(x) = \cos(x^2 + 2x^3)\cdot(2x + 6x^2)$ Kettenregel

b) $f'(x) = 3\cdot(4 - x) + 3x\cdot(-1)$ Produktregel

c) $f'(x) = 2x(3 - x^2)4 + x\cdot[3(3 - x^2)^3(-2x)]$ Produktregel und Kettenregel im 2. Faktor

d) $f'(x) = \dfrac{2x - \cos(x^2 - 3x)\cdot(2x-3)}{2\sqrt{x^2 - \sin(x^2 - 3x)}}$ Kettenregel und für den Sinus ebenfalls

e) $f'(x) = \dfrac{3\sin x \cdot [1\sqrt{x^2-1} + x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}] - 3\cos x \cdot x\sqrt{x^2-1}}{(3\sin x)^2}$ Quotientenregel, Produkt und Kettenregel im Zähler

Aufgabe II:

1. $f(x) = (x-3)^2\cdot x$

a) D = IR keine der 3 Ausnahmen

b) SP mit x-Achse:

Bed.: f(x) = 0

$(x-3)^2\cdot x = 0$

$x_1 = 0$ $N_1(0|0)$ (auch SP mit y-Achse)

$x_2 = 3$ $N_2(3|0)$

d) $f(x) = (x-3)^2x = (x^2 - 6x + 9)x = x^3 - 6x^2 + 9x$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}) = \pm\infty$$

e) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-3)\cdot(x-1)$ (auch m. Produktregel bestimmb.)

$f''(x) = 6x - 12$

Extrempunkte

$f'(x) = 0$

$3(x-3)\cdot(x-1) = 0$

$x_1 = 3$ $y_1 = 0$

$x_2 = 1$ $y_2 = 4$

$f''(3) = 6 > 0$ Tiefpunkt: $T(3|0)$

$f''(1) = -6 < 0$ Hochpunkt: $H(1|4)$

f) Krümmung und Wendepunkte

$f''(x) = 0$

$x = 2$ $y = 2$

	2	
6x – 12	–	+
$f''(x)$	–	+

Graph rechtsgekrümmt für $x \in]-\infty; 2]$

Graph linksgekrümmt für $x \in [2;\infty[$

Wendepunkt $W(2|2)$

Wendetangente (mit Formel aus FS)

$x_o = 2$

$f(x_o) = 2$

$f'(x_o) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3$

$y = -3(x - 2) + 2$

t : $y = -3x + 8$

g) Graph

2. $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$

a) $D = \mathbb{R}$ keine der 3 Ausnahmen

b) <u>SP mit x-Achse:</u>

Bed.: $f(x) = 0$

$x^3 - 12x^2 + 45x = 0$

$x(x^2 - 12x + 45) = 0$

$x_1 = 0$ $\quad x_{2|3} = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 180}}{2}$ ↯ keine weiteren Nullstellen

N (0|0) (auch SP mit y-Achse)

d) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^3\left(1 - \frac{12}{x} + \frac{45}{x^2}\right) = \pm\infty$$

e) $f'(x) = 3x^2 - 24x + 45 = 3(x^2 - 8x + 15) = 3(x - 5)\cdot(x - 3)$

$f''(x) = 6x - 24$

<u>Extrempunkte</u>

$f'(x) = 0$

$3(x - 5)\cdot(x - 3) = 0$

$x_1 = 3 \quad y_1 = 54$

$x_2 = 5 \quad y_2 = 50$

$f''(3) = -6 < 0$ Hochpunkt: H(3|54)

$f''(5) = 6 > 0$ Tiefpunkt: T(5|50)

f) <u>Krümmung und Wendepunkte</u>

$f''(x) = 0$

$x = 4 \quad y = 52$

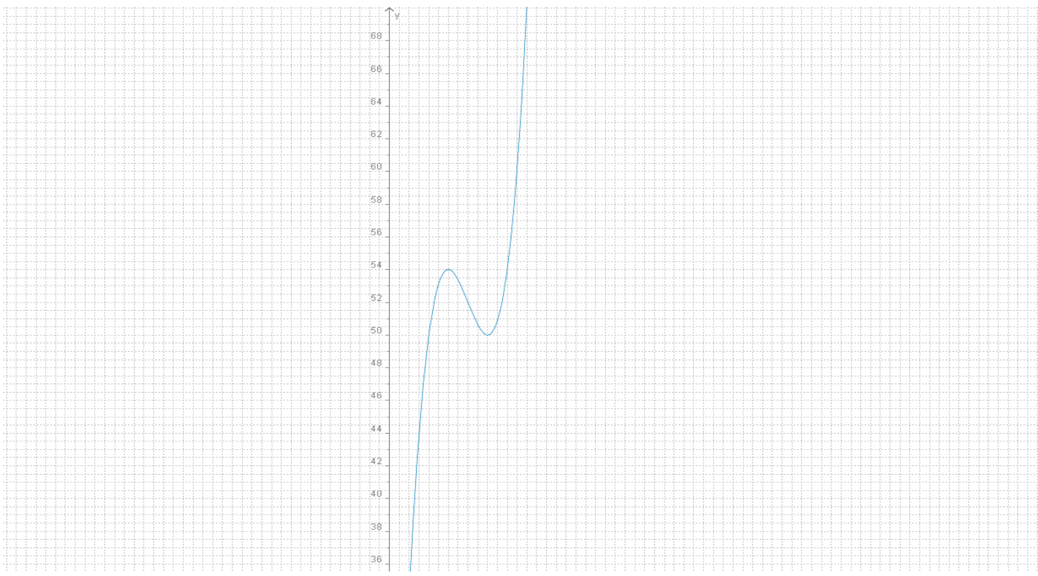
		4	
$6x - 24$	$-$		$+$
$f''(x)$	$-$		$+$

Graph rechtsgekrümmt für $x \in \,]-\infty; 4]$

Graph linksgekrümmt für $x \in [4; \infty[$

Wendepunkt W(4|52)

g) <u>Graph</u>



3. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

a) $9 - x^2 \geq 0$ Wurzel
$|x| \leq 3$ $D = [-3;3]$

b) SP mit x-Achse:
Bed.: $f(x) = 0$
$9 - x^2 = 0$
$x^2 = 9$
$x_1 = -3$ $N_1\ (-3|0)$
$x_2 = +3$ $N_2\ (3|0)$

SP mit y-Achse:
$f(0) = 3$
$S_y\ (-3|0)$

c) $f(-x) = \sqrt{9-(-x)^2} = \sqrt{9-x^2} = f(x)$ Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse

d) $\lim\limits_{x \to +3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to +3^-} \sqrt{9-x^2} = 0$ $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^+} \sqrt{9-x^2} = 0$

e) $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$

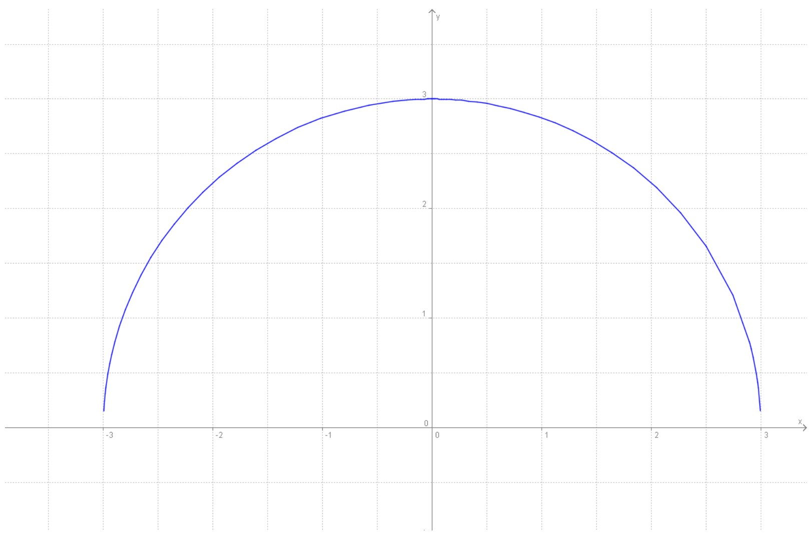
$$f''(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}\cdot(-1) - \dfrac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}\cdot(-x)}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2} = \frac{-\sqrt{9-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2} = \frac{-\dfrac{(\sqrt{9-x^2})^2}{\sqrt{9-x^2}} - \dfrac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{-9 + x^2 - x^2}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3} = \frac{-9}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3} < 0$$

Extrempunkte
$f'(x) = 0$
$-x = 0$
$x = 0 \quad y = 3$
$f''(0) = -1/3 < 0$ Hochpunkt: $H(0|3)$

f) Krümmung und Wendepunkte
Da gilt: $f''(x) < 0$, ist Graph rechtsgekrümmt in D, kein Wendepunkt

g) Graph



3. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

a) $x^2 - 1 = 0$ Bruch
$x = \pm 1$ $D = \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

b) <u>SP mit x-Achse:</u>
Bed.: f(x) = 0
$x^2 = 0$
$x = 0$ N (0|0) (auch SP mit y –Achse)

c) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2-1} = \dfrac{x^2}{x^2-1} = f(x)$ Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse

d) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)} = +\infty$ vertikale Asymptote: $x = -1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)} = -\infty$ vertikale Asymptote: $x = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1$ horizontale Asymptote: $y = 1$

e) $f'(x) = \dfrac{(x^2-1)\cdot 2x - x^2\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x^3-2x-2x^3}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{(x^2-1)^2\cdot(-2)-(-2x)\cdot\left[2(x^2-1)\cdot 2x\right]}{(x^2-1)^4} = \dfrac{(x^2-1)\cdot\left[(-2x^2+2)+8x^2\right]}{(x^2-1)^4} = \dfrac{6x^2+2}{(x^2-1)^3} =$

$= \dfrac{6x^2+2}{(x-1)^3(x+1)^3}$

<u>Extrempunkte</u>
$f'(x) = 0$
$-2x = 0$
$x = 0 \quad y = 0$
$f''(0) = -2 < 0$ Hochpunkt: H(0|0)

f) Krümmung und Wendepunkte

$f''(x) = 0$

$6x^2 + 2 = 0$

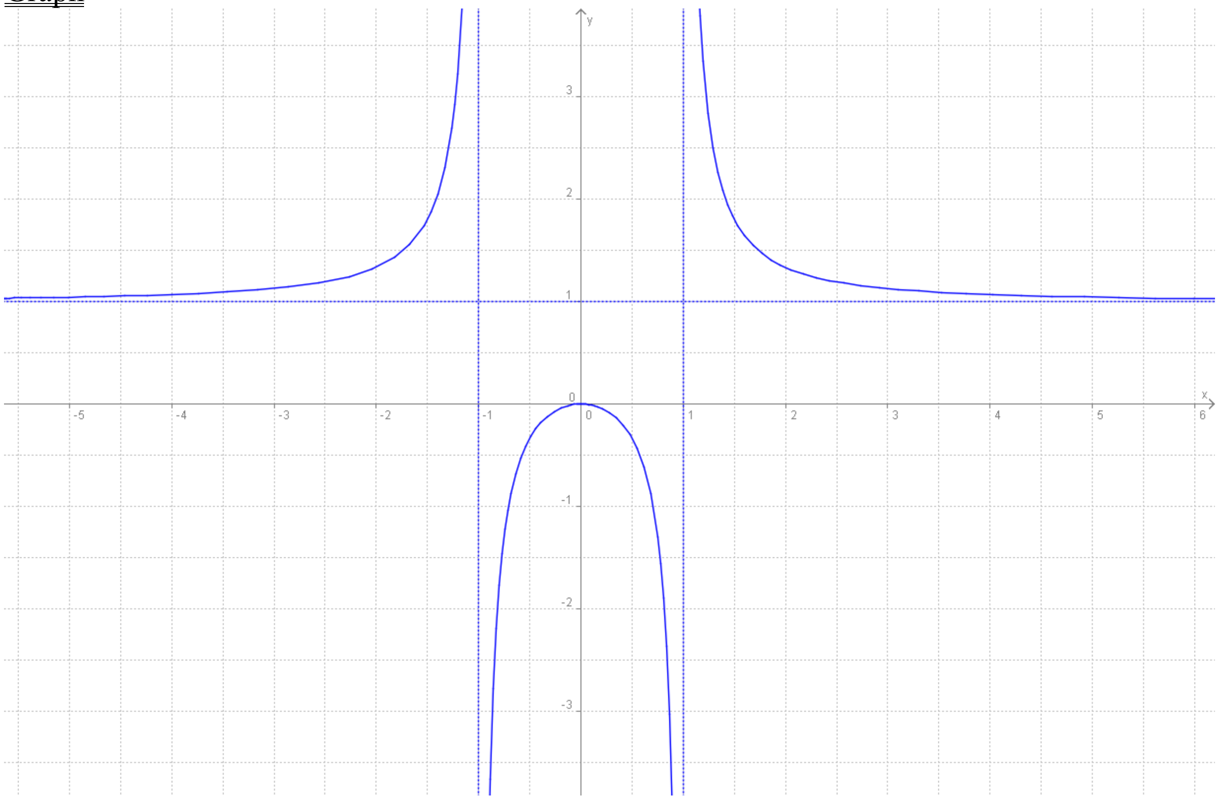
$x^2 = -1/3$ Kein Wendepunkt

		-1	$+1$
$6x^2 + 2$	+	+	+
$(x-1)^3$	–	–	+
$(x+1)^3$	–	+	+
$f''(x)$	+	–	+

Graph linksgekrümmt für $x \in]-\infty; -1[$
Graph rechtsgekrümmt für $x \in]-1;1[$
Graph linksgekrümmt für $x \in]1;\infty[$

Definitionslücken beachten!

g) Graph



Aufgabe III:

„Senkrecht" zur gegebenen Gerade bedeutet, dass folgender Zusammenhang zwischen Tangentensteigung m und Steigung m_g der Geraden g besteht:

$$m = -\frac{1}{m_g} = -\frac{1}{2}$$

mit $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

folgt aus $f'(x) = -\dfrac{1}{2}$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2} \quad => \sqrt{x} = -1$$

Es gibt kein x, das diese Bedingung erfüllt. Also gibt es keinen Punkt mit der gegebenen Eigenschaft.

Aufgabe IV:

1. f: $x \mapsto \dfrac{x}{x-2}$ D =]2; ∞[

a) $f'(x) = \dfrac{(x-2)\cdot 1 - x\cdot 1}{(x-2)^2} = \dfrac{-2}{(x-2)^2} < 0$

Da f in D streng monoton abnimmt, ist f umkehrbar.

b) f: $y = \dfrac{x}{x-2}$

$y(x-2) = x$

$yx - 2y - x = 0$

$x(y-1) = 2y$

$x = \dfrac{2y}{y-1}$

f^{-1}: $y = \dfrac{2x}{x-1}$

c) Die Graphen sind zueinander symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden y = x und schneiden sich in dieser Gerade. Also muss man den SP des Graphen von f mit der Winkelhalbierenden berechnen.

f(x) = x

$\dfrac{x}{x-2} = x$

$x = x^2 - 2x$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$

$x_1 = 0 \notin D$

$x_2 = 3$ $y_2 = 3$ Schnittpunkt : S(3|3)

2. $f: x \mapsto \dfrac{4}{x+4}$ D =]–4; ∞[

a) f'(x) = $\dfrac{(x+4)\cdot 0 - 4\cdot 1}{(x+4)^2} = \dfrac{-4}{(x+4)^2} < 0$

Da f in D streng monoton abnimmt, ist f umkehrbar.

b) f: $y = \dfrac{4}{x+4}$

$y(x+4) = 4$

$yx + 4y = 4$

$yx = 4 - 4y$

$x = \dfrac{4-4y}{y}$

f^{-1}: $y = \dfrac{4-4x}{x}$

c) Die Graphen sind zueinander symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden y = x und schneiden sich in dieser Gerade. Also muss man den SP des Graphen von f mit der Winkelhalbierenden berechnen.

f(x) = x

$\dfrac{4}{x+4} = x$

$4 = x^2 + 4x$

$x^2 + 4x - 4 = 0$

$$x_{1|2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+16}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

$x_1 = -2 - 2\sqrt{2} \notin D$

$x_2 = -2 + 2\sqrt{2}$ $y_2 = -2 + 2\sqrt{2}$ Schnittpunkt : $S(-2+2\sqrt{2} \mid -2+2\sqrt{2})$

3. $f: x \mapsto \sin(0{,}25x + \pi)$ D = [2π; 6π]

a) f'(x) = 0,25·cos(0,25x + π)

f'(x) = 0

cos(0,25x + π) = 0

$0{,}25x + \pi = (2k + 1)\cdot\frac{\pi}{2}$ $k \in Z$

$0{,}25x = (2k + 1)\cdot\frac{\pi}{2} - \pi$

x = (2k + 1)·2π– 4π

Auffinden der Nullstellen in D:

k = 0: x = –2π ∉ D

k = 1: x = 2π

k = 2: x = 6π

	2π 6π
cos(0,25x + π)	+
f''(x)	+

f streng monoton zunehmend f. x ∈ [2π; 6π]

Damit ist f umkehrbar.

4. $f: x \mapsto x^2 + 2x$ D = [0; ∞[

a) $f'(x) = 2x + 2$
$f'(x) = 0$
$x = -1$
für $x \geq 0$ gilt: $f'(x) > 0$
Damit nimmt f in D streng monoton zu, und ist somit umkehrbar.

b) f: $y = x^2 + 2x$
$x^2 + 2x - y = 0$
$$x_{1|2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4(-y)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4y}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1+y}}{2} = -1 \pm \sqrt{1+y}$$
Da $x \geq 0$, muss der Teil mit dem + genommen werden (und für y muss gelten: $y \geq 0$):
f^{-1}: $y = -1 + \sqrt{1+x}$

c) Die Graphen sind zueinander symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden y = x und schneiden sich in dieser Gerade. Also muss man den SP des Graphen von f mit der Winkelhalbierenden berechnen.

$f(x) = x$
$x^2 + 2x = x$
$x^2 + x = 0$
$x(x + 1) = 0$
$x_1 = -1 \notin D$
$x_2 = 0$ $y_2 = 0$ Schnittpunkt : S(0|0)