§14 Kurvendiskussion

Beispiel: $f(x)=\frac{x^3-7x+6}{x^2-x}=\frac{(x-2)(x+3)(x-1)}{x(x-1)}=\frac{(x-2)(x+3)}{x}=\frac{x^2+x-6}{x}=x+1-\frac{6}{x}$

Form:	I	II	III	IV	V
	ungekürzt nicht faktorisiert	ungekürzt faktorisiert	gekürzt faktorisiert	gekürzt nicht faktorisiert	gekürzt nach Polydiv.

1. Definitionsmenge $x^2-x=0$

Form I/II $x(x-1)=0$

$x_1=0;\ x_2=1$ $D=\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$

2. SP mit x-Achse: $x^3-7x+6=0$ ($x_1=1\notin D$ (erraten)

Form I/II $x(x-1)=0$

$(x^3-7x+6):(x-1)=x^2+x-6$ (durch Polynomdivision)

$x^2+x-6=0$

$(x-2)(x+3)=0$ (z.B. Vieta)

$x_1=2;\ x_2=-3$

$N_1(2/0)$ $N_2(-3/0)$

damit ggf. Form II bestimmen, kürzen und so Form III und IV bestimmen

3. SP mit y-Achse: $x=0\notin D$ => kein SP vorhanden

4. Definitionslücken:

- $x=0$: Polstelle 1. Ordnung

Form III

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\overset{-}{(x-2)}\overset{+}{(x+3)}}{\underset{+}{x}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\overset{-}{(x-2)}\overset{+}{(x+3)}}{\underset{-}{x}}=+\infty$$

vertikale Asymptote: $x=0$

- $x=1$: stetig behebbare Definitionslücke

$$\lim_{x\to1^\pm}f(x)=\lim_{x\to1^\pm}\frac{(x-2)(x+3)}{\underset{+}{x}}=\frac{-1\cdot4}{1}=-4$$ Lücke: L(1/–4)

5. Verhalten im ∞: $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x}=x+1-\frac{6}{x}$ (Form V ggf. mit Polynomdivision)

Form IV $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\frac{6}{x}\right)=+\infty$

→ Form V $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+1-\frac{6}{x}\right)=-\infty$

schräge Asymptote: $y=x+1$

6. Ableitung: f(x) = $x+1-\frac{6}{x} = x+1-6x^{-1}$

gekürzte Form f'(x) = $1+6x^{-2} = 1+\frac{6}{x^2} = \frac{x^2+6}{x^2} > 0$

hier: Form V auch mit Quotientenregel bestimmbar

7. Monotonie, Extr.: f'(x) = 0

$x^2 + 6 = 0$

$x^2 = -6$ keine Extrema

Da f'(x) > 0 folgt:
f streng monoton zunehmend für $x \in]-\infty;0[$
f streng monoton zunehmend für $x \in]0; \infty [\setminus \{1\}$

8. Stammfunktion f(x) = $x+1-\frac{6}{x} = x+1-6x^{-1}$

Form V F(x) = $\frac{1}{2}x^2 + x - 6\ln|x| + C$