$$f(x) = \frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{x(x-2)+x(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x^2}{x^2-4}$$

a) <u>Definitionsmenge:</u> (x+2) (x-2) = 0; **D = IR \{-2; 2}**

<u>SP mit x-Achse:</u> f(x) = 0; x = 0 **N(0/0)**

<u>SP mit y-Achse:</u> Siehe oben: **S_y(0/0)**

<u>Symmetrie:</u> $f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2-4} = \frac{2x^2}{x^2-4} = f(x)$ **G achsensymm. zum Ursprung**

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2-4} = 2$ **horiz. Asymptote: y = 2**

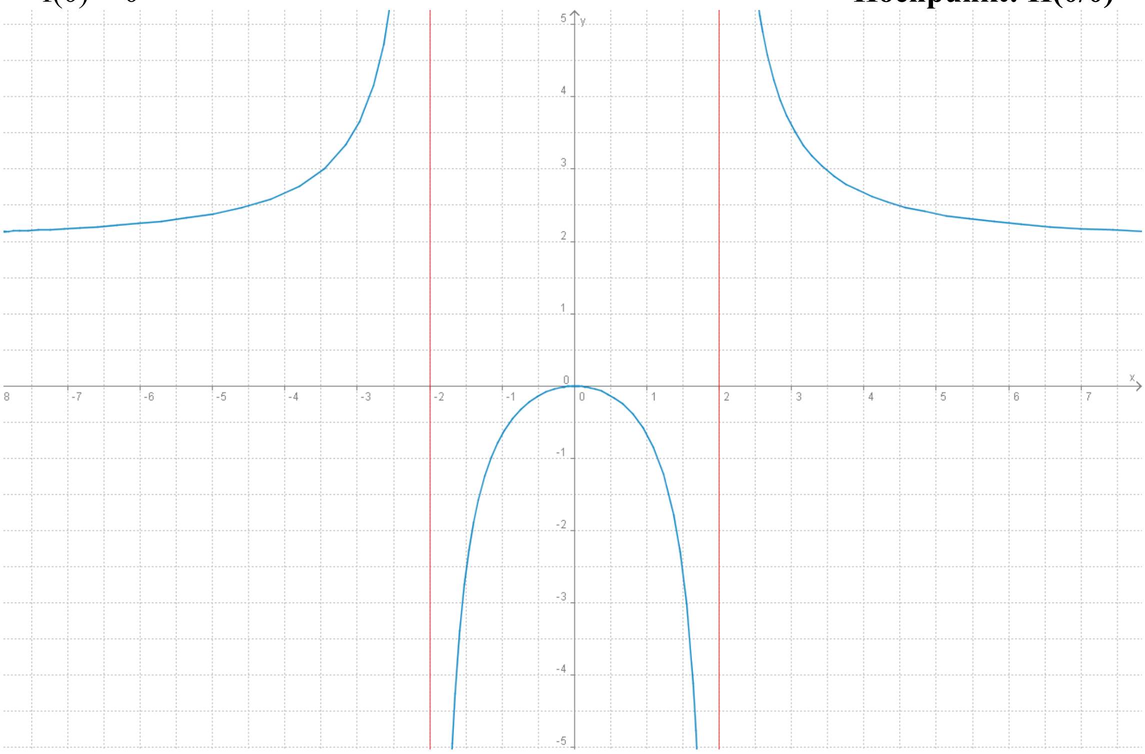
$\lim\limits_{x\to-2^-} \frac{2x^2}{(x+2)(x-2)} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^+} \frac{2x^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty$ **vertik. Asymptote: x = -2**

$\lim\limits_{x\to+2^-} \frac{2x^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+2^+} \frac{2x^2}{(x+2)(x-2)} = +\infty$ **vertik. Asymptote: x = 2**

<u>Art der Def. Lücken:</u>
x = -2: Polstelle 1. Ordnung
x = 2: Polstelle 1. Ordnung

c) $f'(x) = \frac{(x^2-4)\cdot 4x - 2x^2\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{4x^3-16x-4x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{-16x}{(x^2-4)^2}$

<u>Extrema:</u>
f'(x) = 0; x = 0
f' besitzt an der Stelle x = 0 einen VZW von + nach –; MAX
f(0) = 0 **Hochpunkt: H(0/0)**



$f(x) = 1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-2x+1}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}$

a) Definitionsmenge: $x^2 = 0$; **D = IR \{0}**

SP mit x-Achse: $f(x) = 0$; $x = 1$ (dopp. Nst.) **N(1/0)**

SP mit y-Achse: Da $0 \notin D$, **kein SP vorhanden**

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=1$ **horiz. Asymptote: y = 1**

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{(x-1)^2}{x^2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(x-1)^2}{x^2}=+\infty$ **vertik. Asymptote: x = 0**

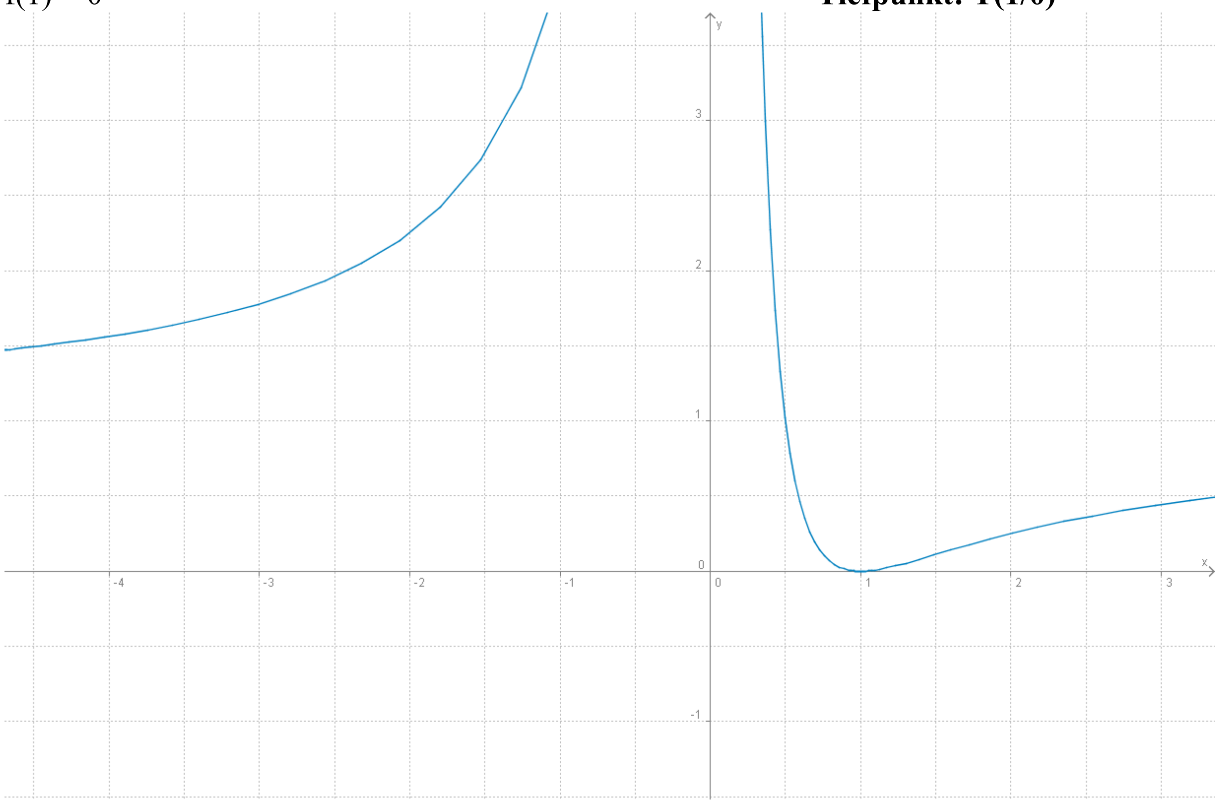
Art der Def. Lücken:
x = 0: Polstelle 2. Ordnung

c) entweder: $f'(x) = \left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)' = \left(1-2x^{-1}+x^{-2}\right)' = +2x^{-2}-2x^{-3} = \frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}=\frac{2x-2}{x^3}$

oder:

$f'(x)=\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2}\right)' = \frac{x^2(2x-2)-2x(x^2-2x+1)}{x^4} = \frac{x(2x^2-2x-2x^2+4x-2)}{x^4} = \frac{2x-2}{x^3}$

Extrema:
$f'(x) = 0$; $x = 1$
f' besitzt an der Stelle x = 1 einen VZW von – nach +; MIN
$f(1) = 0$ **Tiefpunkt: T(1/0)**



e) $F(x) = \int\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx = x - 2\cdot\ln|x| - \frac{1}{x} + C$

$f(x) = \dfrac{2x^3+2}{x^2}$

a) <u>Definitionsmenge:</u> $x^2 = 0$; **D = IR \{0}**

<u>SP mit x-Achse:</u> $f(x) = 0$; $x^3 = -1$; $x = -1$ **N(-1/0)**

<u>SP mit y-Achse:</u> Da $0 \notin D$, **kein SP vorhanden**

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+2}{x^2} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3+2}{x^2} = -\infty$

Asymptote: $f(x) = \dfrac{2x^3+2}{x^2} = 2x + \dfrac{2}{x^2}$ **schräge Asymptote: y = 2x**

$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{2x^3+2}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2x^3+2}{x^2} = +\infty$ **vertik. Asymptote: x = 0**

<u>Art der Def. Lücken:</u>
$x = 0$: Polstelle 2. Ordnung

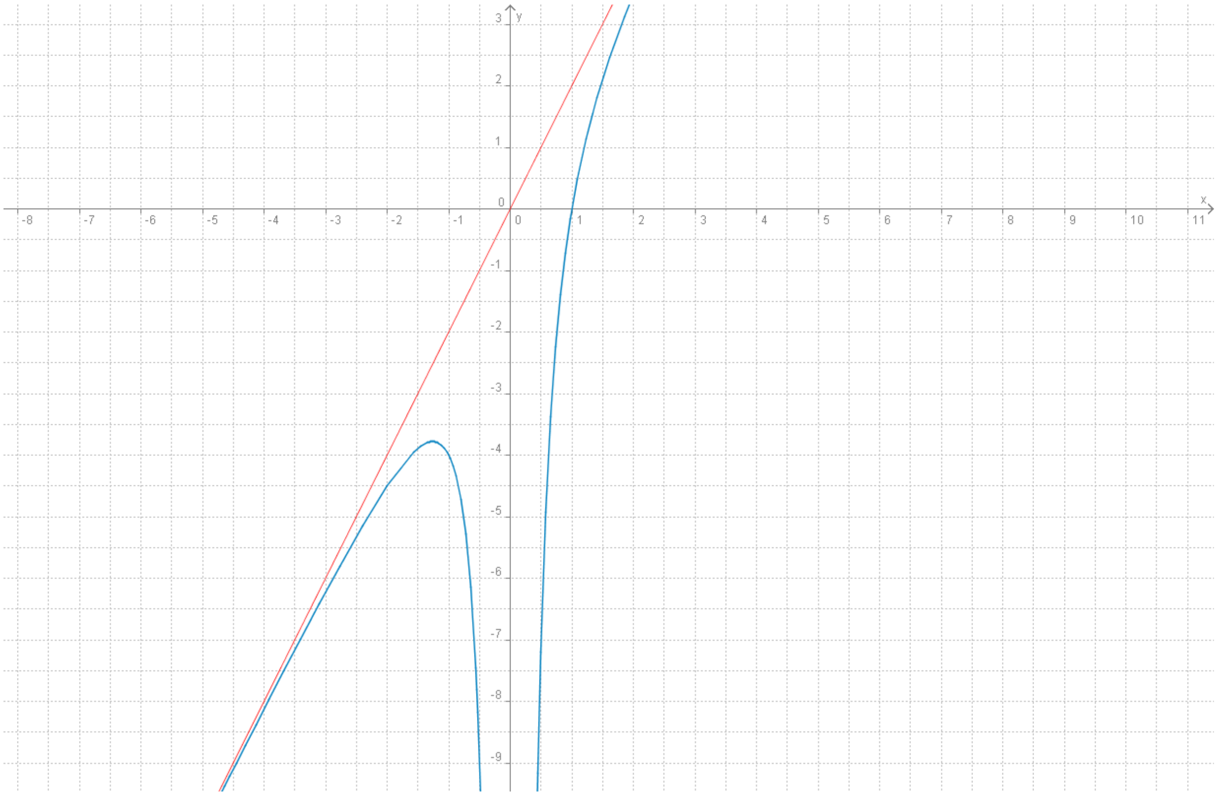
c) $f'(x) = \dfrac{x^2\cdot6x^2-2x\cdot(2x^3+2)}{x^4} = \dfrac{x(6x^3-4x^3-4)}{x^4} = \dfrac{2x^3-4}{(x^2-4)^2}$

<u>Extrema:</u>

$f'(x) = 0$; $x^3 = 2$ $x = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$

f' besitzt an der Stelle $x = \sqrt[3]{2}$ einen VZW von – nach +; MIN

$f(\sqrt[3]{2}) = \dfrac{2\left(\sqrt[3]{2}\right)^3+2}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} = \dfrac{2\cdot2+2}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} = \dfrac{6}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} \approx 3{,}78$ **Tiefpunkt: T($\sqrt[3]{2}$ / $\dfrac{6}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}$)**



$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

a) <u>Definitionsmenge:</u> $x + 1 = 0$; **D = IR \{-1}**

<u>SP mit x-Achse:</u> $f(x) = 0$; $x = 0$ **N(0/0)**

<u>SP mit y-Achse:</u> Siehe oben: **S_y(0/0)**

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x+1} = -\infty$

Asymptote : $x^2 : (x + 1) = x - 1 - \frac{1}{x+1}$ **schräge Asymptote : y = x – 1**

$$\begin{array}{l} -\underline{(x^2+x)} \\ \quad -x \\ \quad -\underline{(x+1)} \\ \qquad -1 \end{array}$$

$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x^2}{x+1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$ **vertik. Asymptote: x = -1**

<u>Art der Def. Lücken:</u> x = -1: Polstelle 1. Ordnung

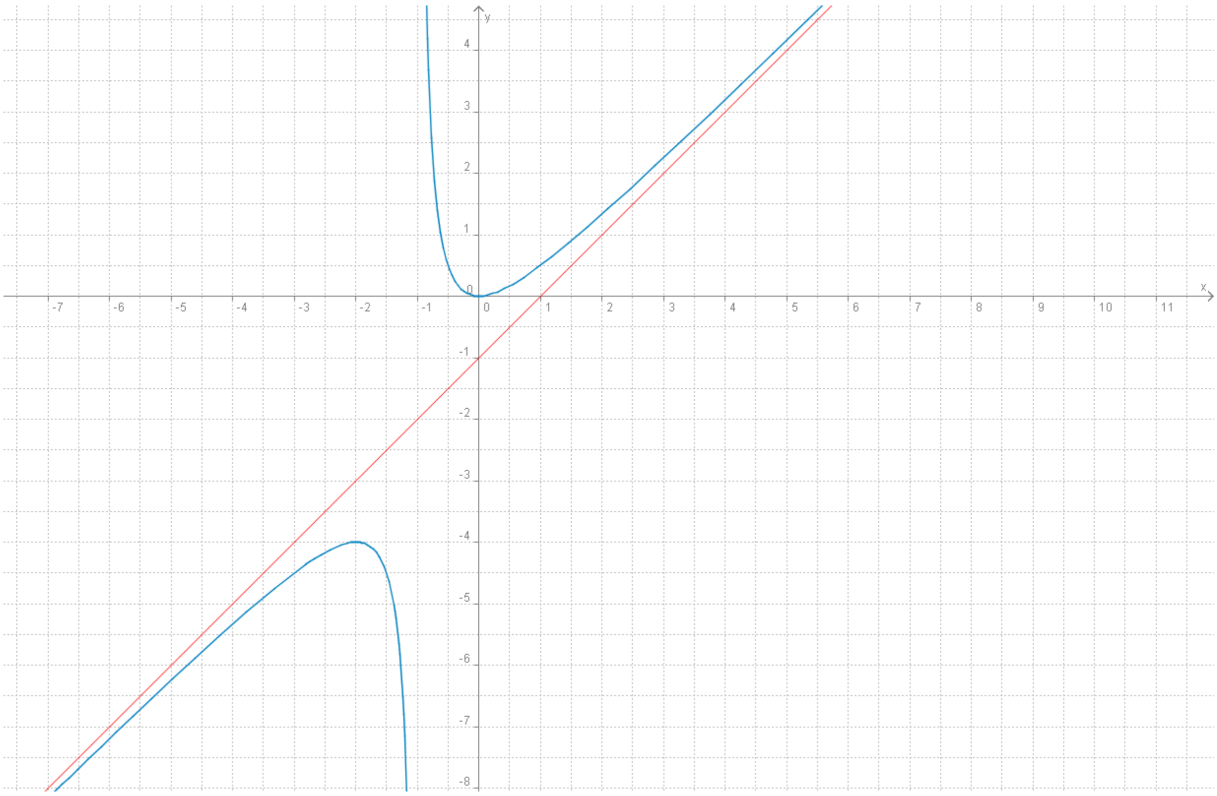
c) $f'(x) = \frac{(x+1) \cdot 2x - 1 \cdot x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

<u>Extrema:</u>

$f'(x) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = -2$ $f(0) = 0$; $f(-2) = -4$

f' besitzt an der Stelle x = 0 einen VZW von - nach +; MIN **Tiefpunkt: H(0/0)**

f' besitzt an der Stelle x = –2 einen VZW von + nach –; MAX **Hochpunkt: H(-2/-4)**



$$f(x) = \frac{x^2-2}{(x+2)^2} = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x+2)^2} = \frac{x^2-2}{x^2+4x+4}$$

a) Definitionsmenge: $(x+2)^2 = 0$; **D = IR \{-2}**

SP mit x-Achse: $f(x) = 0$; $x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$ **$N_1(-\sqrt{2}/0)$** $N_2(\sqrt{2}/0)$

SP mit y-Achse: $f(0)\ \frac{-2}{2^2} = -\frac{1}{2}$: **$S_y(0/-0,5)$**

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2}{x^2+4x+4} = 1$ **horiz. Asymptote: y = 1**

$\lim\limits_{x\to-2^-} \frac{x^2-2}{(x+2)^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+2^-} \frac{x^2-2}{(x+2)^2} = +\infty$ **vertik. Asymptote: x = -2**

Art der Def. Lücken:

x = -2: Polstelle 2. Ordnung

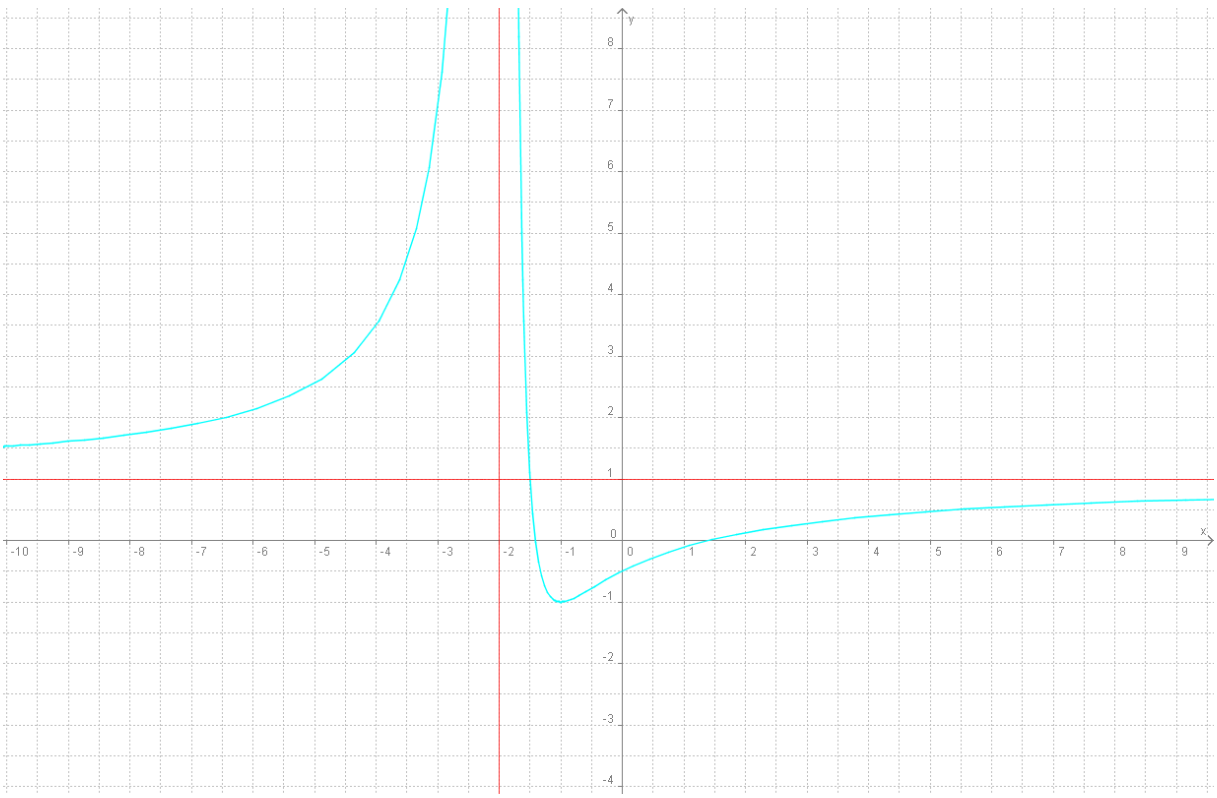
c) $f'(x) = \frac{(x+2)^2\cdot 2x - 2(x+2)\cdot 1\cdot (x^2-2)}{(x^2+2)^4} = \frac{(x+2)(2x^2+4x-2x^2+4)}{(x^2+2)^4} = \frac{4x+4}{(x^2+2)^3}$

Extrema:

$f'(x) = 0$; $x = -1$

f' besitzt an der Stelle x = -1 einen VZW von - nach +; MIN

$f(-1) = -1$ **Tiefpunkt: T(-1/-1)**



$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 6x}{x^2 + x - 2} = \frac{x(x-3)(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x(x-3)}{x-1} = \frac{x^2 - 3x}{x-1}$$

a) Definitionsmenge: $(x+2)\,(x-1) = 0$; **D = IR \\{-2; 1}**

SP mit x-Achse: $f(x) = 0$; $x_1 = 0$; $(x_2 = -1 \notin D)$ **N(0/0)**

SP mit y-Achse: Siehe oben: **S_y(0/0)**

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x}{x-1} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 3x}{x-1} = -\infty$

$$(x^2 - 3x):(x - 1) = x - 2 - \frac{1}{x-1}$$

$\underline{-(x^2 - x)}$
$-2x$
$\underline{-(-2x+1)}$
-1

schräge Asymptote: y = x – 2

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x(x-3)}{(x-1)} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x(x-3)}{(x-1)} = -\infty$ **vertik. Asymptote: x = 1**

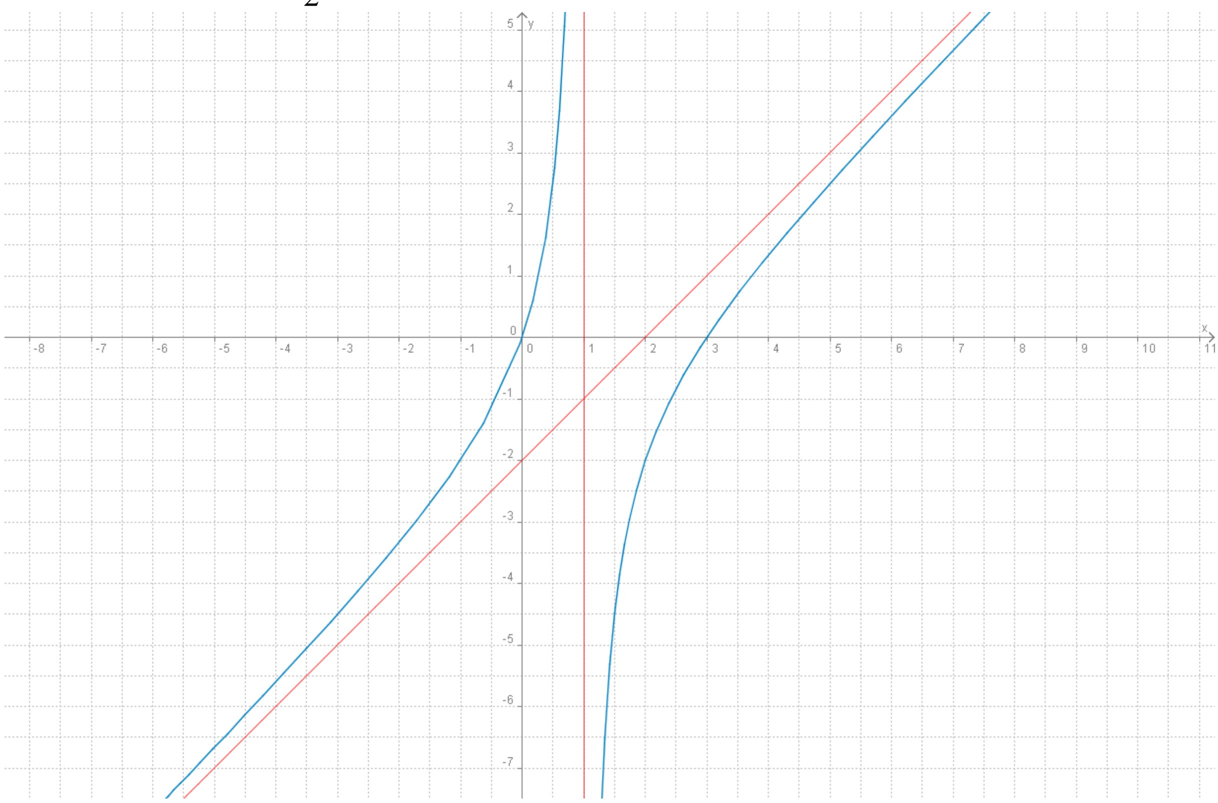
$\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{x(x-3)}{(x-1)} = \frac{10}{-3} = -3\frac{1}{3}$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -3\frac{1}{3}$

Art der Def.-Lücken:
x = 1: Polstelle 1. Ordnung
x = –2: Stetig behebbare Definitionslücke

c) $$f'(x) = \frac{(x-1)\cdot(2x-3) - 1\cdot(x^2 - 3x)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 3x - 2x + 3 - x^2 + 3x}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2}$$

Extrema:

$f'(x) = 0$; $x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2}$ **keine Extrema vorhanden**



$f(x) = \dfrac{x^2 - k}{x + 1}$

a) <u>Definitionsmenge:</u> $(x + 1) = 0$; **D = IR \{-1}**

<u>Nst.:</u> $f(x) = 0$; $x_{1/2} = \pm\sqrt{k}$;

keine Nst. für $k \in]-\infty; 0[$

genau eine Nst. $x = 0$ für $k = 0$
$x = 1$ für $k = 1$

genau 2 Nst. $x_{1/2} = \pm\sqrt{k}$ für $k \in]0; \infty[\setminus \{1\}$

b) Faktor $(x+1)$ lässt sich für $k = 1$ vollständig aus dem Nenner kürzen. Deshalb ist die Stelle $x = -1$ für $k = 1$ stetig fortsetzbar

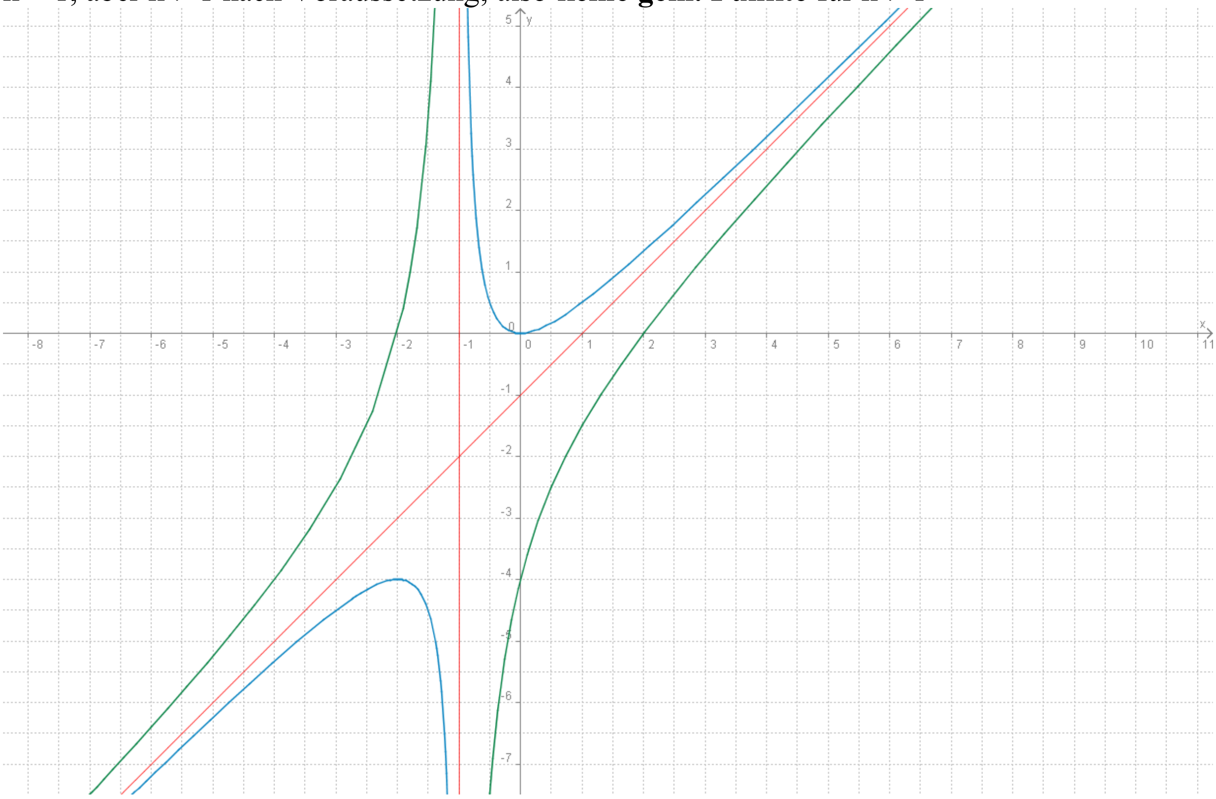
$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} (x - 1) = -2$$

c) $(x^2 - k) : (x + 1) = x - 1 + \dfrac{1-k}{x+1}$ **schräge Asymptote: $g(x) = x - 1$**

$\underline{-(x^2+x)}$
$-x-k$
$\underline{-(-x-1)}$
$+1 - k$

d) $f_k(x) = g(x)$; $x - 1 + \dfrac{1-k}{x+1} = x - 1$; $\dfrac{1-k}{x+1} = 0$;

$k = 1$, aber $k \neq 1$ nach Voraussetzung; also **keine gem. Punkte** für $k \neq 1$



$$A = \int_0^{e-1} [f_0(x) - f_4(x)]dx = \int_0^{e-1} \left[\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2-4}{x+1}\right]dx = \int_0^{e-1} \left[\frac{4}{x+1}\right]dx = 4\int_0^{e-1} \left[\frac{1}{x+1}\right]dx = [4\ln|x+1|]$$

$= 4\ln e - 4\ln 1 = 4 - 0 = 4$