Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_k : x \mapsto \dfrac{kx}{x^2 - k^2}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und maximaler Definitionsmenge $D_k$. Der Graph von $f_k$ wird mit $G_k$ bezeichnet.

1. a) Bestimmen Sie $D_k$ und untersuchen Sie $G_k$ auf Symmetrie und Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. (3)
   b) Geben Sie das Verhalten von $f_k$ an den Rändern von $D_k$ an. (5)

2. a) Bestätigen Sie, dass gilt : $f_k'(x) = \dfrac{-k \cdot (x^2 + k^2)}{(x^2 - k^2)^2}$ (4)

   Untersuchen Sie $f_k$ auf Monotonie.

3. Zeichnen Sie $G_2$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 1 cm). (5)

4. Gegeben ist die Integralfunktion $F : x \mapsto \int_3^x f_2(t)\,dt$ mit $x \in \left]2; \infty\right[$.

   a) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass F umkehrbar ist. (2)
   b) Ermitteln Sie eine integralfreie Darstellung von F und bestätigen Sie, dass für die Umkehrfunktion $F^{-1}$ gilt: $F^{-1}(x) = \sqrt{5e^x + 4}$ (6)