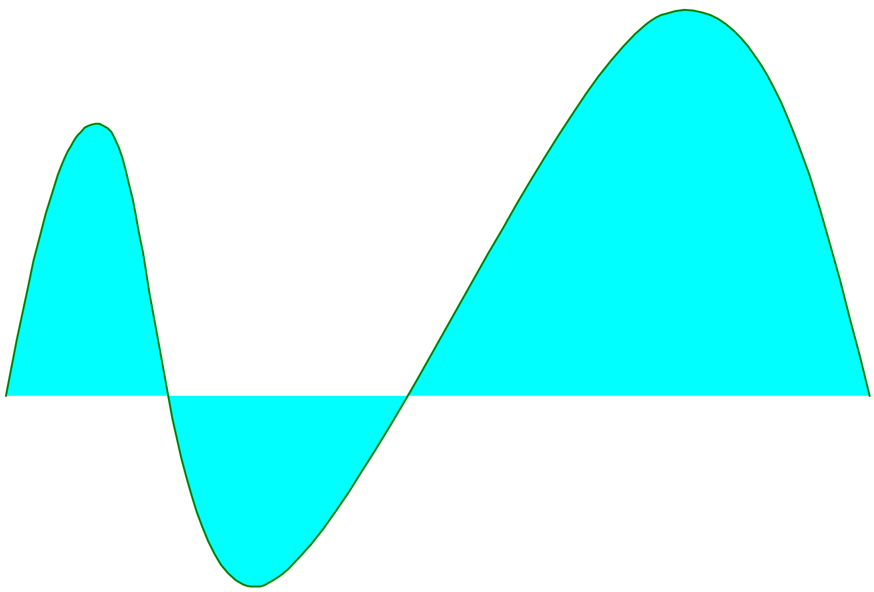
Mathematik Grundkurs
Infinitesimalrechnung



Unterrichtsskript
nach bayerischem Lehrplan G9

 www.drothler.net

§00 Wiederholung und wichtige Formeln

1. Summen

Abkürzende Schreibweise für Summen:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu := a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

„Summe aller a_ν für $\nu = 1$ bis n“

Beispiele:

$$\sum_{\nu=1}^{12} \nu = 1+2+3+\ldots+12\,; \quad \sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\,;\ldots$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(1+\nu h) = f(1+h)+f(1+2h)+\ldots+f(1+nh)\,;$$

Regeln:

$$\sum_{\nu=1}^{n}(k\cdot a_\nu) = k\cdot\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}(k+a_\nu+b_\nu) = nk+\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu+\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}(k+ma_\nu) = nk+m\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$$

Beweis:

$$\sum_{\nu=1}^{n}(k\cdot a_\nu) = k\cdot a_1+k\cdot a_2+\ldots+k\cdot a_n = k\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_n) = k\cdot\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}(k+a_\nu+b_\nu) = k+a_1+b_1+ \quad k+a_2+b_2+ \quad \ldots \quad + \quad k+a_n+b_n =$$

$$= nk+(a_1+a_2+\ldots+a_n)+(b_1+b_2+\ldots+b_n) = nk+\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu+\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu$$

2. Summenformeln

Merke: (vgl. FS)

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Beispiele:

$$1 + 2 + 3 + ... + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

$$1 + 2 + 3 + ... + n - 1 = \frac{(n-1)\cdot n}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-2)^2 = \frac{(n-2)(n-1)[2(n-2)+1]}{6} = \frac{(n^2-3n+2)(2n-3)}{6} = ...$$

3. Funktionswerte

Bestimme für die Funktion f: $x \to x^2 - 2x + 2$ folgende Terme:

- $f(1) = 1 - 2 + 2 = 1$
- $f(a) = a^2 - 2a + 2$
- $f(a + 1) = (a+1)^2 - 2(a+1) + 2 = a^2 + 2a + 1 - 2a - 2 + 2 = a^2 + 1$
- $f(a + b) + f(a + 2b) = (a+b)^2 - 2(a+b) + 2 + (a+2b)^2 - 2(a+2b) + 2 =$
  $= a^2 + 2ab + b^2 - 2a - 2b + 2 + a^2 + 4ab + 4b^2 - 2a - 4b + 2 = 2a^2 + 6ab + 5b^2 - 4a - 6b + 4$
- $f(a + b) + f(a + 2b) + ... + f(a + 10b) =$
  $$= \sum_{\nu=1}^{10} f(a+\nu b) = \sum_{\nu=1}^{10}(a+\nu b)^2 + 2\sum_{\nu=1}^{10}(a+\nu b) + \sum_{\nu=1}^{10} 2 =$$
  $$= \sum_{\nu=1}^{10}(a^2 + 2\nu ab + \nu^2 b^2) + 2\sum_{\nu=1}^{10}(a+\nu b) + \sum_{\nu=1}^{10} 2 =$$
  $$= 10a^2 + 2ab\sum_{\nu=1}^{10}\nu + b^2\sum_{\nu=1}^{10}\nu^2 + 2\cdot 10\cdot a + b\sum_{\nu=1}^{10}\nu + 2\cdot 10 =$$
  $= 10a^2 + 110ab + 385b^2 + 20a + 110b + 20$

4. Einige Grenzwerte

Berechne:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{12}{x^2} + \frac{3}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12 - 3x + 2x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{12}{x^2} - \frac{3}{x} + 2}{1} = 2$$

I. INTEGRALRECHNUNG

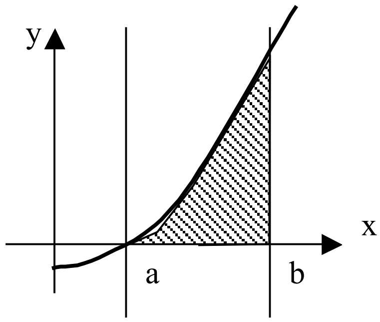
§01 Flächenberechnung mit der Streifenmethode

Problem:

Es soll der Flächeninhalt A angenähert werden, der vom Graphen einer Funktion und der x-Achse in einem bestimmten Intervall [a; b] eingeschlossen wird.

Beispiel:

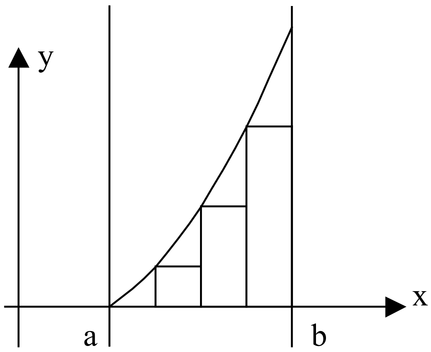
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$; $a = 1$; $b = 3$



Lösung:

Das Flächenstück wird in n rechteckige Streifen mit derselben Breite Δx zerlegt, deren Flächeninhalte addiert werden. Je größer die Anzahl n der Streifen ist, desto besser wird der gesuchte Flächeninhalt angenähert.

n = 4 Streifen dem Graphen *einbeschrieben*

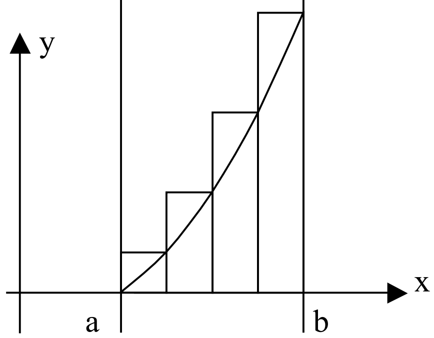


Breiten der Rechtecke: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$

Höhen: ① $h_1 = f(1 + 0 \cdot \frac{1}{2}) = 0$
② $h_2 = f(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}) = 5/8$
③ $h_3 = f(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}) = 3/2$
④ $h_4 = f(1 + 3 \cdot \frac{1}{2}) = 2\ 5/8$

Fläche: $s_4 = 0 \cdot \frac{1}{2} + 5/8 \cdot \frac{1}{2} + 3/2 \cdot \frac{1}{2} + 2\ 5/8 \cdot \frac{1}{2} =$
$= 2\frac{3}{8}$

Streifen dem Graphen *umbeschrieben*



Breiten der Rechtecke: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$

Höhen: ① $h_1 = f(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}) = 5/8$
② $h_2 = f(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}) = 3/2$
③ $h_3 = f(1 + 3 \cdot \frac{1}{2}) = 2\ 5/8$
④ $h_4 = f(1 + 4 \cdot \frac{1}{2}) = 4$

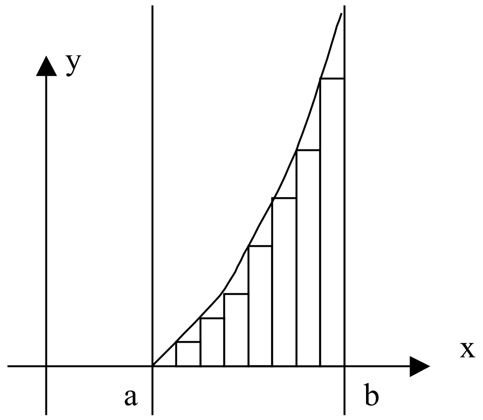
Fläche: $S_4 = 5/8 \cdot \frac{1}{2} + 3/2 \cdot \frac{1}{2} + 2\ 5/8 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} =$
$= 4\frac{3}{8}$

Merke

Die auf diese Weise bestimmte Fläche s_n heißt *Untersumme* und S_n heißt *Obersumme*.

Es gilt stets: $s_n < A < S_n$

Untersumme für **n = 8**



Breite: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{8} = \frac{1}{4}$

$$s_8 = \frac{1}{4} \cdot \left[f(1+0\cdot \tfrac{1}{4}) \quad + \quad f(1+0\cdot \tfrac{1}{4}) \quad + \ . \ . \ . \ + \quad f(1+7\cdot \tfrac{1}{4}) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\sum_{i=0}^{7} f(1+i\cdot \tfrac{1}{4}) \right] = \frac{1}{4} \cdot \left[\sum_{i=0}^{7} \left(\frac{1}{2}(1+i\cdot \tfrac{1}{4})^2 - \frac{1}{2} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\sum_{i=0}^{7} \left(\frac{1}{2}\left(1^2 + 2\cdot i \cdot \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{4} i)^2\right) - \frac{1}{2} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\sum_{i=0}^{7} \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 + \frac{1}{4}\cdot i + \frac{1}{32}\cdot i^2 - \frac{1}{2} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[8\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot \sum_{i=0}^{7} i + \frac{1}{32}\cdot \sum_{i=0}^{7} i^2 - 8\cdot\frac{1}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{4}\cdot \sum_{i=1}^{7} i + \frac{1}{32}\cdot \sum_{i=1}^{7} i^2 \right] = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{4}\cdot 28 + \frac{1}{32}\cdot 140 \right] = 5\frac{11}{16}$$

§02 Das bestimmte Integral

1. Exakter Flächeninhalt

Problem:
Wie kann mit Ober- und Untersumme der exakte Flächeninhalt A berechnet werden?

Lösung anhand des Beispiels:

① Bestimmung der Untersumme s_n für beliebiges n

Breite: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$

$$s_n = \frac{2}{n}\cdot\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(1+i\cdot\frac{2}{n})\right] = \frac{2}{n}\cdot\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}(1+i\cdot\frac{2}{n})^2-\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{n}\cdot\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\left(1^2+2\cdot i\cdot\frac{2}{n}+(\frac{2}{n}i)^2\right)-\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{n}\cdot\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2+\frac{2}{n}\cdot i+\frac{2}{n^2}\cdot i^2-\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{n}\cdot\left[\frac{2}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} i+\frac{2}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} i^2\right] =$$

$$= \frac{4}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} i+\frac{4}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} i^2 =$$

$$= \frac{4}{n^2}\cdot\frac{(n-1)[(n-1)+1]}{2}+\frac{4}{n^3}\cdot\frac{(n-1)\cdot[(n-1)+1]\cdot[2(n-1)+1]}{6} =$$

$$= \frac{4}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}+\frac{4}{n^3}\cdot\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6} =$$

$$= \frac{2(n-1)}{n}+\frac{2(2n^2-n-2n+1)}{3n^2} =$$

$$= \frac{2n-2}{n}+\frac{4n^2-6n+2}{3n^2} = 2-\frac{2}{n}+\frac{4}{3}-\frac{2}{n}+\frac{2}{3n^2} =$$

$$= 3\frac{1}{3}-\frac{4}{n}+\frac{2}{3n^2}$$

② Berechnung des Grenzwertes für $n \to \infty$.

$$A = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(3\frac{1}{3}-\frac{4}{n}+\frac{2}{3n^2}) = 3\frac{1}{3}$$

Analog:

Für die Obersumme S_n ergibt sich: $S_n = \frac{2}{n}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n} f(1+i\cdot\frac{2}{n})\right] = 3\frac{1}{3}+\frac{4}{n}+\frac{2}{3n^2}$

Somit: $A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(3\frac{1}{3}+\frac{4}{n}+\frac{2}{3n^2}) = 3\frac{1}{3}$

2. Bestimmtes Integral

Satz
Die Grenzwerte von Obersumme und Untersumme stimmen überein. Ihr Betrag gibt die Maßzahl des Flächeninhaltes A an.

Definition
Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ (bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$) heißt *bestimmtes Integral der Funktion f in den Grenzen von a bis b.*
Schreibweise:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Also gilt für f(x)= ½x² - ½:

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 [\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}]dx = 3\frac{1}{3}$$

Einige wichtige bestimmte Integrale

$$\int_a^b dx = \int_a^b 1dx = b - a \qquad \int_a^b xdx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$\int_a^b x^2dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \qquad \int_a^b x^3dx = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$$

Beispiele

$$\int_{-5}^3 x^2dx = \frac{3^3}{3} - \frac{(-5)^3}{3} = \frac{27}{3} + \frac{125}{3} = 50\frac{2}{3}$$

$$\int_{12}^{111} dx = 111 - 12 = 99$$

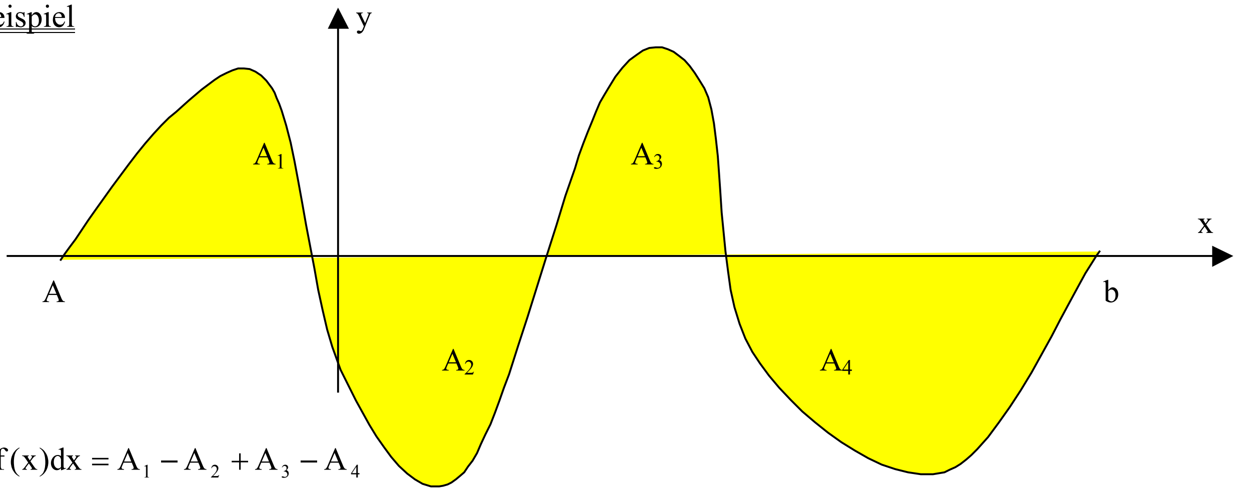
$$\int_{-a}^a xdx = \frac{(-a)^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$$

3. Geometrische Bedeutung

<u>Merke:</u>

Das bestimmte Integral entspricht der Summe der gerichteten Flächen zwischen Graphen und x-Achse. Bei der Integration von links nach rechts werden Flächen unterhalb der x-Achse von den Flächen oberhalb der x-Achse subtrahiert.

<u>Beispiel</u>



$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

§03 Integral- und Stammfunktion

Definition

f sei im Intervall I stetig. Jede in I definierte Funktion

F: $x \to F(x) = \int_a^x f(t)dt$ mit $a \in I$

heißt eine Integralfunktion von f in I.
Die Funktion f heißt Integrandenfunktion.

Beispiele:

Verschiedene Integralfunktionen für f: $x \to x$

$F_2(x) = \int_2^x t dt = \frac{x^2}{2} - \frac{2^2}{2} = \frac{x^2}{2} - 4$; $F_2(2) = 2 - 2 = 0$

$F_0(x) = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{x^2}{2}$; $F_0(0) = 0$

Satz:

Jede Integralfunktion besitzt mindestens eine Nullstelle, nämlich die untere Integrationsgrenze.

Definition

Eine differenzierbare Funktion F heißt Stammfunktion einer Funktion f im gemeinsamen Definitionsbereich, wenn dort gilt:
$F'(x) = f(x)$

Beispiele:

1. *Bestimme die Stammfunktionen folgender Funktion f(x) = sinx;*
   Stammfunktion F(x) = - cos x +C
2. *Zeige dass*
   a) $F(x) = 25x^2 - 12x$
   b) $F_k(x) = \frac{x^2 - k}{x+1}$ *(*$D_{Fk} = IR\backslash\{-1\}$*)*
   Stammfunktion von
   a) $f(x) = 50x - 12$ *ist.*
   b) $f_k(x) = \frac{x^2 + 2x + k}{(x+1)^2}$ *(*$D_{fk} = IR\backslash\{-1\}$*) ist.*

   a) $F'(x) = 50x - 12 = f(x) \Rightarrow$ F ist Stammfunktion von f.
   b) $F'_k(x) = \frac{(x+1)2x - x^2 + k}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2 + k}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + k}{(x+1)^2} = f_k(x) \Rightarrow F_k$ ist
   Stammfunktion von f_k.

§04 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Satz (HDI)
Sei f eine stetige Funktion mit dem Definitionsbereich D und a, b $\in$ D. Dann gilt:

1. Die Integralfunktion $\int_a^x f(t)dt$ ist eine Stammfunktion von f in D
2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, wobei F eine beliebige Stammfunktion von f in D ist.

Schreibweise: F(b) – F(a) =: $[F(x)]_a^b$

Beispiele:

$\int_0^1 (6x^5)dx = [x^6]_0^1 = 1^6 - 0^6 = 3$ $\qquad$ $\int_0^\pi (\sin x)dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$

Eigenschaften:

$$-\int_a^b f(x)dx = -[F(b) - F(a)] = F(a) - F(b) = \int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = cF(b) - cF(a) = c(F(b) - F(a)) = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = [F(b) + G(b)] - [F(a) + G(a)] = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Gilt f(-x) = -f(x), so ist $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Beispiele:

$$\int_0^\pi (2\sin x + \cos x)dx = [-2\cos x + \sin x]_0^\pi = -2\cos\pi + \sin\pi + 2\cos 0 - \sin 0 = 2 + 2 = 4$$

$$\int_{-\pi}^\pi (\sin x + 4x^3)dx = 0, \text{ da } f(-x) = \sin(-x) + 4(-x)^3 = -\sin x - 4x^3 = -(\sin x + 4x^3) = -f(x)$$

Wichtige Stammfunktionen:

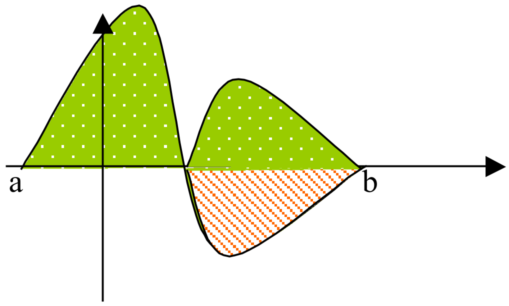
Schreibweise für eine beliebige Stammfunktion von f: $\int f(x)dx$ („unbestimmtes Integral“)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int (\sin x)dx = -\cos x + C$$

$$\int (\cos x)dx = \sin x + C$$

§05 Flächenberechnung



Um den Flächeninhalt A zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse zu berechnen, muss das Integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$ berechnet werden.

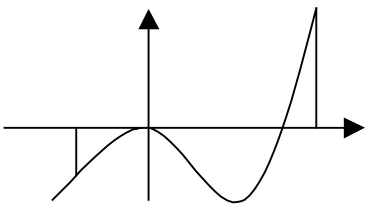
Einfacher: „Von Nullstelle zu Nullstelle integrieren“:

① Nullstellen im Intervall [a; b] berechnen ($x_1, x_2, \ldots, x_n$)

② Integration: $A = \left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_n}^{b} f(x)dx\right|$

Aufgabe:
Bestimme den Flächeninhalt A, der vom Graphen der Funktion $f(x) = 2x^3 - 4x^2$, der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = -2$ und $x = 3$ eingeschlossen wird.

Lösung:



① $f(x) = 0$
$2x^3 - 4x^2 = 0$
$x^2(2x-4) = 0$
$x_1 = 0$
$x_2 = 2$

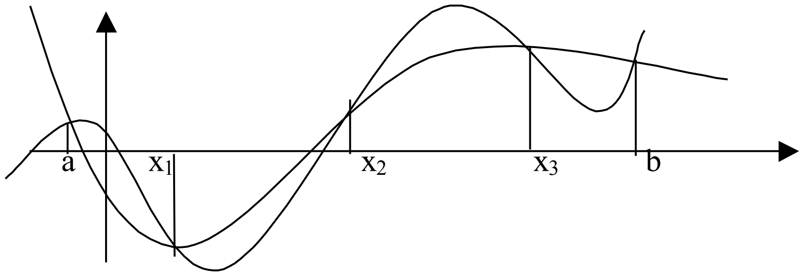
② $A = \left|\int_{-2}^{0}(2x^3-4x^2)dx\right| + \left|\int_{0}^{2}(2x^3-4x^2)dx\right| + \left|\int_{2}^{3}(2x^3-4x^2)dx\right| =$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{2}-\frac{4x^3}{3}\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{2}-\frac{4x^3}{3}\right]_{0}^{2}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{2}-\frac{4x^3}{3}\right]_{2}^{3}\right| =$$

$$= \left|0-\left(\frac{(-2)^4}{2}-\frac{4(-2)^3}{3}\right)\right| + \left|\left(\frac{2^4}{2}-\frac{4\cdot 2^3}{3}\right)-0\right| + \left|\left(\frac{3^4}{2}-\frac{4\cdot 3^3}{3}\right)-\left(\frac{2^4}{2}-\frac{4\cdot 2^3}{3}\right)\right| =$$

$$= \left|-2\frac{2}{3}\right| + \left|-2\frac{2}{3}\right| + \left|7\frac{1}{6}\right| = 12\frac{1}{2}$$

§06 Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen



Um die Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen f und g zu bestimmen, muss man den Betrag der Differenz der beiden Funktionen integrieren.

Also:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx =$$

$$= \left|\int_a^{x_1} [f(x) - g(x)]dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_n}^{b} [f(x) - g(x)]dx\right|$$

Aufgabe:

Bestimme das von den Graphen der Funktionen
$f(x) = x^2 + 3x + \sin x$ und
$g(x) = -x^2 - 2x + \sin x$
eingeschlossene Flächenstück..

Lösung:

① Bestimme die Differenzfunktion d(x) = f(x) – g(x) (größere Werte minus kleinere)

$d(x) = -x^2 - 2x + \sin x - (x^2 + 3x + \sin x) = -2x^2 - 5x$

② Bestimme die Schnittstellen der Graphen (Nullstellen von d)

$d(x) = 0$
$-2x^2 - 5x = 0$
$x(-2x - 5) = 0$
$x_1 = -2{,}5$
$x_2 = 0$

③ Bestimme die Fläche durch Integration der Differenzfunktion

$$A = \int_{-2,5}^{0} (-2x^2 - 5x)dx = [-\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2]_{-2,5}^{0} = 0 - (-\frac{2}{3}(-2{,}5)^3 - \frac{5}{2}(-2{,}5)^2) = 5\frac{5}{24}$$

§07 Die Umkehrfunktion

1. Umkehrbarkeit:

Entsteht nach dem Variablentausch wieder eine Funktionsgleichung, so sagt man: *f ist umkehrbar*.

Satz:
Eine Funktion f ist genau dann umkehrbar, wenn für alle $x_1 \neq x_2$ folgt: $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Satz:
Eine streng monotone Funktion ist umkehrbar.

2. Bestimmung der Umkehrfunktion:

Beispiel: f: $y = -x^2 + 2$ $\qquad D_f =]-\infty; 0]$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad W_f =]-\infty; 2]$

① Auflösen nach x
f: $y = -x^2 + 2$
f: $x^2 = -y + 2$
f: $x = \pm\sqrt{-y+2}$

② Vertauschen der Variablen:
f^{-1}: $y = -\sqrt{-x+2}$ $\qquad D_{f^{-1}} =]-\infty; 2]$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad W_{f^{-1}} =]-\infty; 0]$

3. Eigenschaften :

- Der Graph der Umkehrfunktion geht aus dem Graphen der Funktion durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten hervor.
- Für Werte- und Definitionsmengen gilt:
  $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$
- Die Umkehrfunktion einer streng monoton zunehmenden (abnehmenden) Funktion ist streng monoton zunehmend (abnehmend).
- Es gilt ① $(f^{-1})^{-1} = f$
  ② $f(f^{-1}(x)) = x$
  ③ $f^{-1}(f(x)) = x$

  Beispiel von oben: $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(-x^2 + 2) = -\sqrt{-(-x^2+2)+2} = -\sqrt{x^2} = -|x| = x \quad (x < 0)$

4. Differenziation

Es gilt:

$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(y)}$ mit $y = f^{-1}(x)$ und $f'(y) \neq 0$

Beispiel:
$f(x) = -x^2 + 2$
$(f^{-1})(x) = -\sqrt{-x+2}$

Es gilt: $f'(x) = -2x$
und $f'(f^{-1}(x)) = -2\,(-\sqrt{-x+2}\,) = 2\sqrt{-x+2}$

Damit: $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{-x+2}}$

II. Logarithmus- und Exponentialfunktion

§08 Das Integral $\int \frac{dx}{x}$

Problem:

Wie kann man die Integralfunktion L: $x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$ (x > 0) bestimmen?

Eigenschaften von L:

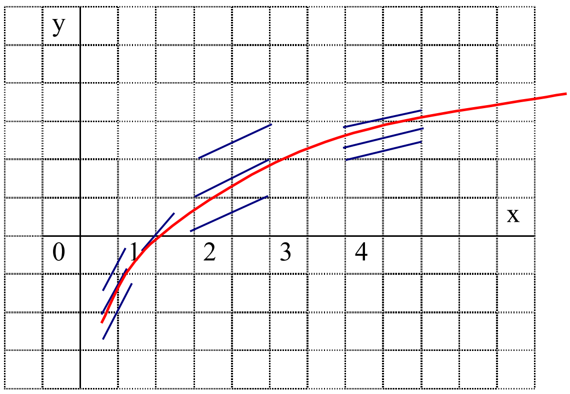
Es gilt: $\boxed{L'(x) = \frac{1}{x}}$

Damit $L'(x) > 0$ für x >0 L ist streng monoton zunehmend

L(1) = 0 (untere Grenze) x = 1 ist die einzige Nullstelle von L (wegen Monotonie)

An der Stelle x_o hat der Graph von L die Steigung $\frac{1}{x_o}$.

„Phantombild“ des Graphen von L



Funktionalgleichungen

Es gilt: $[L(ax)]' = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x} =$ L (x)

damit: $\int [L(ax)]'dx = \int L(x)dx =$ L (x)

also: L(ax) = L(x) + c

mit x = 1: L(a) = 0 + c $\Rightarrow$ c = L(a)

mit x = b ergibt sich:

$\boxed{L(ab) = L(a) + L(b)}$ mit a > 0 und b > 0

und

$\boxed{L(a^r) = rL(a)}$ mit $r \in$ IR, $a \in IR^+$

Mit c: = ab und d: = b
folgt: a = c/d

Es ergibt sich:
L(c) = L(c/d) + L (d)

Also: $\boxed{L(c/d) = L(c) - L(d)}$ c > 0, d > 0

Wertemenge:

Zur Bestimmung der Wertemenge muss man sich fragen, welche Werte y annehmen kann, also muss überlegt werden, ob es für jedes $y \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Gleichung $y = L(x)$ gibt (wobei gilt: $x > 0$).

Setze: $x = 2^r$

Also: $y = L(2^r) = r \cdot L(2)$ (Wegen Monotonie gilt: $0 = L(1) < L(2) \neq 0$)

Damit ist: $r = y/L(2)$ und so $x = 2^{y/L(2)} > 0$

W = IR .

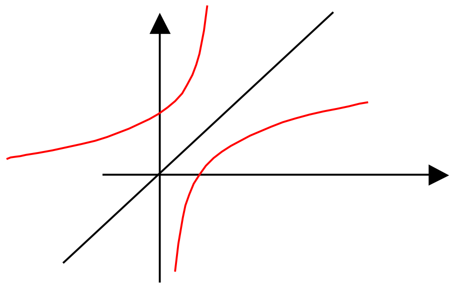
Identifizierung

Es gilt also: $L(a^x) = xL(a)$

Wähle für a diejenige Zahl e, für die gilt: $L(e) = 1$, dann folgt

$L(e^x) = xL(e) = x1 = x$

Die Exponentialfunktion $f: x \to e^x$ ($D = \mathbb{R}$; $W = \mathbb{R}^+$) ist die Umkehrfunktion der Funktion L.



Ergebnis:

L ist die Logarithmusfunktion zur Basis e. Sie wird als natürliche Logarithmusfunktion bezeichnet.(Logarithmus naturalis „ln“) Es gilt:

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$$

Für die Umkehrfunktion L^{-1} gilt: $L^{-1}(x) = e^x$.

$e \approx 2{,}7128281...$

Umformungen:

$x = \ln e^x$ $x = e^{\ln x}$

Unter lnx versteht man diejenige Zahl, die man mit e potenzieren muss, um x zu erhalten.

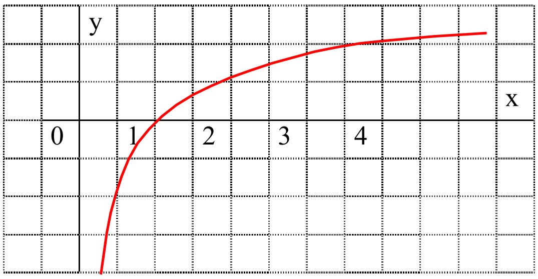
Also:

$\ln e = 1$ $\ln 1 = 0$

§09 Die natürliche Logarithmusfunktion

1. Standardfunktion f: x ↦ lnx $D_f =]0;\infty[$

Graph:



Eigenschaften:

- einzige Nullstelle: x = 1
- Grenzwerte und Asymptoten: $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x) = -\infty$ vertikale Asymptote: x = 0

  $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x) = +\infty$
- Ableitung und Monotonie: f(x) = lnx $\Rightarrow$ $f'(x) = \frac{1}{x}$

  Da f'(x) > 0, ist f streng monoton zunehmend im Definitionsbereich *D*.
- Weitere Eigenschaften: $\ln(a\cdot b) = \ln a + \ln b$

  $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$

  $\ln(a^b) = b\cdot\ln a$

2. Verkettete Funktionen x ↦ ln (g(x))

Die Funktion g(x) heißt *Argument der ln-Funktion*.

Beispiel: f(x) = ln(2x+2)

- Definitionsmenge: Bed.: 2x + 2 > 0 => x > -1

  Also: $D_f =]-1;\infty[$
- Nullstellen: Bed.: f(x) = 0

  ln(2x+2) = 0

  2x + 2 = 1

  x = –0,5
- Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{2x+2}\cdot 2 = \frac{1}{x+1}$ 2/(2x+2) =1/(x+1)

§10 Weitere Integrationsregeln

1. Standardfunktion

Wir wissen: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$, falls $x > 0$

Problem: Was ist $\int \frac{1}{x}\,dx$, falls $x < 0$?

Lösung: Für $x < 0$ ist $F(x) = \ln(-x)$ erklärt.

$$F'(x) = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} = f(x)$$

$\Rightarrow$ F: $x \mapsto \ln(-x)$ ist eine Stammfunktion von f: $x \mapsto \frac{1}{x}$ falls $x < 0$.

Ergebnis: $$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \text{ für } x \neq 0}$$

2. Zusammengesetzte Funktion

Problem: Zeige, dass $G(x) = \ln|f(x)|$ eine Stammfunktion von $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ ist.

Lösung:

- Für $f(x) > 0$ gilt: $G(x) = \ln[f(x)]$

  $$G'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = g(x)$$
- Für $f(x) < 0$ gilt: $G(x) = \ln[-f(x)]$

  $$G'(x) = \frac{1}{-f(x)} \cdot [-f'(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)} = g(x)$$

$\Rightarrow$ $G(x) = \ln|f(x)|$ ist Stammfunktion von $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Ergebnis: $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C, \text{ für } f(x) \neq 0}$$

Beispiele:

$$\int \frac{4x-3}{2x^2-3x+3}\,dx = \ln|2x^2-3x+3| + C$$

$$\int \frac{x-1}{3x^2-6x+3}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x-6}{3x^2-6x+3} = \frac{1}{6}\ln|3x^2-6x+3| + C$$

$$\int \frac{6\cos x}{\sin(3x)}\,dx = 2\int \frac{3\cos x}{\sin(3x)} = 2\ln|\sin(3x)| + C$$

§11 Die natürliche Exponentialfunktion

$f: x \mapsto e^x$ $D_f = \mathrm{IR}$

Eigenschaften:

- Nullstellen: Da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathrm{IR}$ folgt: Es gibt keine Nullstellen
- SP mit y-Achse: $f(0) = e^0 = 1$ also : $S_y(0/1)$
- Ränder von D_f: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = \infty$ für x > 0 keine Asymptote

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ für x < 0 : horizontale Asymptote: **y = 0**
- Ableitung: Es gilt: $[f^{-1}(x)]' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

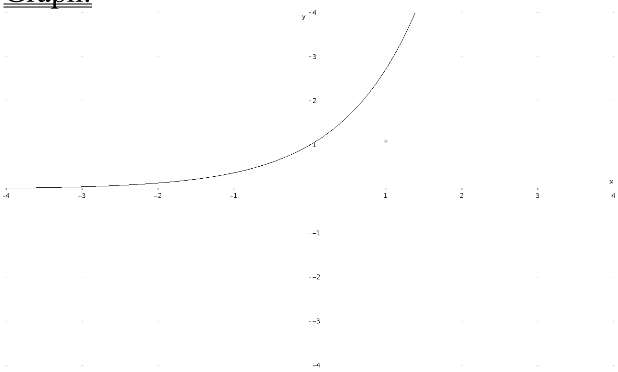
  mit f(x) = lnx; $f^{-1}(x) = e^x$; $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ und $f'(f^{-1}(x)) = \dfrac{1}{f^{-1}(x)} = \dfrac{1}{e^x}$

  folgt: $[f^{-1}(x)]' = \dfrac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \\ \int e^x dx = e^x + C \end{array}}$$

Da $f'(x) > 0$, ist f streng monoton zunehmend im Definitionsbereich *D*.

Graph:



Besondere Umformung:

Untersuche das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion f mit $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{\frac{1 - e^x}{e^x}}{\frac{1 + e^x}{e^x}} = \frac{1 - e^x}{e^x} : \frac{1 + e^x}{e^x} = \frac{1 - e^x}{e^x} \cdot \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{-(e^x - 1)}{e^x + 1} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f(x)$$

Also ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung.

§12 Allgemeine Logarithmus- und Exponentialfunktionen

Kurvendiskussion wie gehabt, Bestimmung der Ableitung und Stammfunktion nach folgender Umformung:

a) $\boxed{f(x) = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln a}}$

Damit: $f'(x) = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$

$$F(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot e^{x \cdot \ln a} + C$$

b) $\boxed{f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}}$

Damit: $f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$

$$F(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot (x \ln x - x) + C$$ (vgl. FS)

<u>Hinweis:</u> Beachte, dass lna eine konstante Zahl ist.

III RATIONALE FUNKTIONEN

§13 Eigenschaften

1. Definition:

Eine Funktion

f: x $\mapsto \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_o}$ mit a_n; $b_n \neq 0$ heißt *rationale Funkltion*.

Ist das Nennerpolynom konstant, so ist f eine *ganzrationale Funktion*.
a_n bzw, b_m heißt *Leitkoeffizient* und n bzw. m der *Grad des Zähler-/bzw. Nennerpolynoms*.

Beispiele:

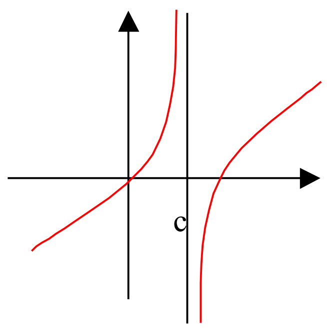
f: x $\mapsto 3x^2 + 4x + 2$: ganzrationale Funktion 2. Grades Leitk.: 3

f: x $\mapsto \dfrac{-3x^3 + 2x^2 + 1}{-x - 4}$: rationale F., Zähler: Grad 3, Leitk.: –3; Nenner Grad 1, Leitk.: –1

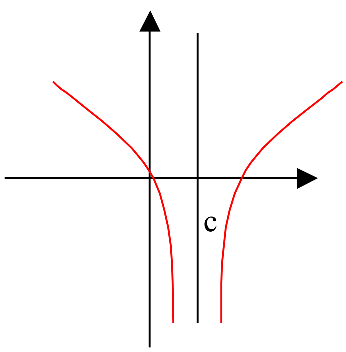
2. Definitionslücken

Ist c ∈ IR eine Nullstelle des Nenners, dann ist enthält das Nennerpolynom den Faktor (x–c) und die Stelle x = c heißt *Definitionslücke*.

Fall a) Der Faktor $(x - c)^k$ lässt sich nicht aus dem Nenner kürzen:
x = c heißt *Polstelle k-ter Ordnung*.

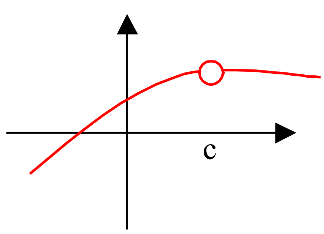


k ungerade: VZW



k gerade: kein VZW

Fall b) Der Faktor $(x–c)^k$ lässt sich vollständig aus dem Nenner kürzen:
x = c heißt *stetig behebbare Definitionslücke*.
f ist an der Stelle x = c *stetig fortsetzbar*. (Loch im Graphen)



Beispiel:

f(x) = $\frac{x^2-3x}{x-x^3} = \frac{x(x-3)}{x(1-x^2)} = \frac{x-3}{1-x^2}$ für x ∈ D = IR\{0;1};

x = 0 ist stetig behebbare Definitionslücke:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -3$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -3$

Die Funktion $\overline{f}: x \mapsto \begin{cases} f(x), & falls\ x \neq 0 \\ -3 & falls\ x = 0 \end{cases}$ heißt *stetige Fortsetzung von f.*

einfacher $\overline{f}: x \mapsto \frac{x-3}{1-x^2}$ D = IR\{1}

3. Verhalten im Unendlichen:

Definition

Eine Gerade mit dem Funktionsterm a(x) heißt *Asymptote* einer Funktion f, wenn die Differenz a(x) – f(x) für x → ∞ gegen Null geht.

Untersuchung rationaler Funktionen

$$f: x \mapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_o} = \frac{x^n \cdot \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_o}{x^n}\right)}{x^m \cdot \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_o}{x^m}\right)}$$

Fall a) n < m *Grad des Zählerpolynoms kleiner als der des Nennerpolynoms*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_o}{x^n}\right)}{x^{m-n} \cdot \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_o}{x^m}\right)} = 0\,;$$ horizontale Asymptote: y = 0

Beispiel: f(x) = $\frac{x+1}{x^2-2}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$; horizontale Asymptote: y = 0

Fall b) n = m *Grad des Zählerpolynoms gleich dem des Nennerpolynoms*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_o}{x^n}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_o}{x^m}} = \frac{a_n}{b_m}\,;$$ horizontale Asymptote y = $\frac{a_n}{b_m}$

Beispiel: f(x) = $\frac{2x+1-x^2}{2x^2-2}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ horizontale Asymptote: y = $-\frac{1}{2}$

Fall c) n > m *Grad des Zählerpolynoms größer als der des Nennerpolynoms*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{n-m}\cdot\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_o}{x^n}\right)}{\left(b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_o}{x^m}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^{n-m}\cdot\frac{a_n}{b_m}\right)=\begin{cases}\pm\infty\cdot\operatorname{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right) & \textit{falls } n-m \textit{ ungerade}\\ \infty\cdot\operatorname{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right) & \textit{falls } n-m \textit{ gerade}\end{cases}$$

Zur Berechnung der Asymptote: Polynomdivision ausführen:

Beispiele:

- $f(x)=\dfrac{x^4-x^3+2x^2}{x^2+1}$

$$f(x)=(x^4-x^3+2x^2):(x^2+1)=x^2-x+1+\frac{-x+1}{x^2+1}$$

$$\begin{array}{l}\underline{-(x^4 \quad\quad + x^2)}\\ \quad -x^3 + x^2\\ \underline{\quad -(-x^3 \quad\quad + x)}\\ \quad\quad\quad x^2 - x\\ \quad\quad \underline{-(x^2 \quad -1)}\\ \quad\quad\quad -x + 1\end{array}$$

Der Bruch („Divisionsrest“) geht gegen Null, der ganzrationale Anteil beschreibt die asymptotische Kurve:

$y = x^2 - x + 1$ ist Gleichung der asymptotischen Kurve

- $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+2}{x^2+1}$

$$f(x)=(x^3-x^2+2):(x^2+1)=x-2+\frac{4}{x^2+1}$$

$$\begin{array}{l}\underline{-(x^3+x^2)}\\ \quad -2x^2+2\\ \underline{-(-2x^2-2)}\\ \quad\quad +4\end{array}$$

schräge Asymptote: $y = x - 2$

§14 Kurvendiskussion

Beispiel: $f(x)=\frac{x^3-7x+6}{x^2-x}=\frac{(x-2)(x+3)(x-1)}{x(x-1)}=\frac{(x-2)(x+3)}{x}=\frac{x^2+x-6}{x}=x+1-\frac{6}{x}$

Form:	I	II	III	IV	V
	ungekürzt nicht faktorisiert	ungekürzt faktorisiert	gekürzt faktorisiert	gekürzt nicht faktorisiert	gekürzt nach Polydivis.

1. Definitionsmenge $x^2 - x = 0$

Form I/II $x(x-1)=0$

$x_1 = 0$; $x_2 = 1$ $D = IR\backslash\{0;1\}$

2. SP mit x-Achse: $x^3 - 7x + 6 = 0$ $x_1 = 1 \notin D$ (erraten)

Form I/II $x(x-1)=0$

$(x^3 - 7x + 6):(x-1) = x^2 + x - 6$ (durch Polynomdivision)

$x^2 + x - 6 = 0$

$(x - 2)(x + 3) = 0$ (z.B. Vieta)

$x_1 = 2$; $x_2 = -3$

$N_1(2/0)$ $N_2(-3/0)$

damit ggf. Form II bestimmen, kürzen und so Form III und IV bestimmen

3. SP mit y-Achse: $x = 0 \notin D$ => kein SP vorhanden

4. Definitionslücken:
- $x = 0$: Polstelle 1. Ordnung

Form III

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\overset{-}{(x-2)}\overset{+}{(x+3)}}{\underset{+}{x}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\overset{-}{(x-2)}\overset{+}{(x+3)}}{\underset{-}{x}}=+\infty$$

vertikale Asymptote: $x = 0$

- $x = 1$: stetig behebbare Definitionslücke

$$\lim_{x\to1^\pm} f(x)=\lim_{x\to1^\pm}\frac{(x-2)(x+3)}{x}=\frac{-1\cdot4}{1}=-4$$ Lücke: $L(1/-4)$

5. Verhalten im ∞: $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x}=x+1-\frac{6}{x}$ (Form V ggf. mit Polynomdivision)

Form IV $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\frac{6}{x}\right)=+\infty$

→ Form V $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+1-\frac{6}{x}\right)=-\infty$

schräge Asymptote: $y = x+1$

6. Ableitung: f(x) = $x+1-\frac{6}{x}=x+1-6x^{-1}$

gekürzte Form f'(x) = $1+6x^{-2}=1+\frac{6}{x^2}=\frac{x^2+6}{x^2}>0$

hier: Form V auch mit Quotientenregel bestimmbar

7. Monotonie, Extr.: f'(x) = 0

$x^2 + 6 = 0$

$x^2 = -6$ keine Extrema

Da f'(x) > 0 folgt:
f streng monoton zunehmend für $x \in]-\infty;0[$
f streng monoton zunehmend für $x \in]0;\infty[\setminus \{1\}$

8. Stammfunktion f(x) = $x+1-\frac{6}{x}=x+1-6x^{-1}$

Form V F(x) = $\frac{1}{2}x^2+x-6\ln|x|+C$

Inhaltsverzeichnis