Kurvenscharen

Bei Kurvenscharen kommt im Funktionsterm neben der Funktionsvariable noch eine weitere Unbekannte (konstanter Parameter) hinzu.

Zu jedem fest eingestellten Wert des Parameters gibt es einen Graphen mit x als Variable.

Bei der Kurvendiskussion verfährt man ganz normal, wobei man (z.B. beim Ableiten) beachten muss, dass der Parameter eine Konstante ist!

Besonderheiten:

1. Bestimmung von Stellen und ihrer Anzahl

Typische Aufgabenstellung:
Berechne die Nullstellen der Funktion und bestimme ihre Anzahl in Abhängigkeit von k:

$f_k(x) = \frac{x^2 - k}{x + 1}$ $\quad D_{f_k} = IR \setminus \{-1\}; \; k \in IR$

① Löse die Aufgabenstellung wie gewohnt (x ist gesucht!)
$f_k(x) = 0$
$x^2 - k = 0$
$x_{1/2} = \pm\sqrt{k}$

② Für welche k ist der Term (hier $\pm\sqrt{k}$) im Ergebnis überhaupt definiert?
k < 0: keine Nullstelle
k = 0: genau eine Nullstelle: x = 0
k > 0: genau 2 Nullstellen: $x_{1/2} = \pm\sqrt{k}$

③ Vergleich mit der Definitionsmenge:
$\pm\sqrt{k} = -1$
für k = 1 gibt es nur eine Nullstelle nämlich x = +1

④ Zusammenfassung:

keine Nullstelle:	für $k \in]-\infty; 0[$
genau 1 Nullstelle:	für k = 1: x = 1 für k = 0: x = 0
genau 2 Nullstellen:	für $k \in]0; \infty[\setminus \{1\}$

2. Unabhängigkeit vom Parameter

Erhält man bei einer Aufgabenstellung ein Ergebnis, in dem der Parameter nicht vorkommt, so ist das Ergebnis unabhängig vom Scharparameter, es trifft für alle Graphen der Schar zu.

Beispiel:

Zeige, dass alle Graphen der Schar $f_a(x) = ax + 1$ die y-Achse in demselben Punkt schneiden.

$f(0) = a \cdot 0 + 1 = 1$ unabhängig von a $\Rightarrow$ Alle Graphen schneiden die y-Achse in S_y (0/1).

3. Ortskurve

Zeichnet man alle zum Beispiel die Extrempunkte aller Kurvenscharen, so können diese wieder einen neuen Graphen bilden. Dieser heißt dann *Ortskurve der Extrempunkte*.

Beispiel:

Die Graphen der Schar $f_a(x) = (x - a)^2 + a$ sind Parabeln mit dem Scheitel S(a/a). Jeder Scheitel besitzt dieselbe x- wie y-Koordinate. Also liegen alle Scheitelpunkte auf der Geraden mit der Gleichung $y = x$.

Die Ortskurve der Scheitelpunkte hat also die Gleichung $y = x$

Bestimmung der Ortskurve:

① Bestimme die Koordinaten des zu betrachtenden Punktes in Abhängigkeit vom Scharparameter.

Beispiel $P(k-1 \,/\, k^2-2k+1)$

② Schreibe die Koordinaten als Gleichungssystem mit 2 Gleichungen auf:

I. $x = k - 1$

II. $y = k^2 - 2k + 1$

③ Löse die Gleichung mit x nach dem Parameter auf und setze das Ergebnis in die andere Gleichung ein:

I. $x = k - 1 \qquad \Rightarrow k = x - 1$

II. $y = k^2 - 2k + 1$

k in II $y = (x-1)^2 - 2(x - 1) + 1$

$y = x^2 - 2x + 1 - 2x - 2 + 1$

$y = x^2 - 4x$

④ Die entstandene Gleichung hat nun x und y als Variable und ist die Gleichung der Ortskurve:

o: $y = x^2 - 4x$

4. Gemeinsame Punkte

Aufgabe: Untersuche die Graphen der Schar $f_k\colon x \mapsto 2kx - k$ auf gemeinsame Punkte.

Lösung: **Wähle zwei verschiedene Parameter und setze die Terme gleich:**

$f_k(x) = f_m(x) \qquad k \neq m$

$2kx - k = 2mx - m$

$2kx - 2mx = k - m$

$x(2k - 2m) = k - m \;|:(2k - 2m) \neq 0$

$x = -0{,}5\,; \qquad y = f_k(0{,}5) = 0$

$P(-0{,}5/0)$ ist der einzige gemeinsame Punkt.