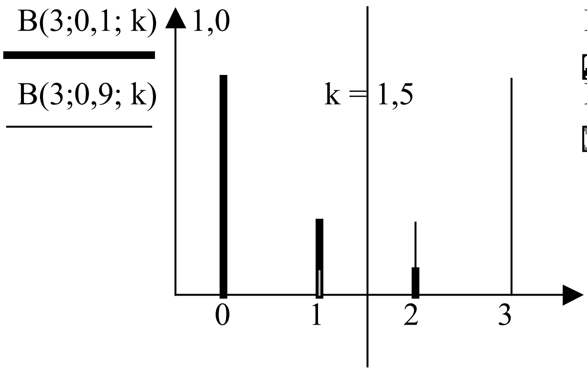
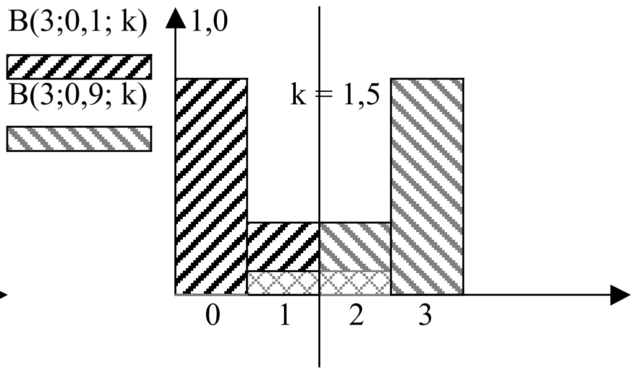
§20 Eigenschaften der Binomialverteilung

1. Graphische Darstellung

k	B(3;0,1; k)	B(3;0,9;k)
0	0,72900	0,00100
1	0,24300	0,02700
2	0,02700	0,24300
3	0,00100	0,72900

Stabdiagramm/Histogramm





Eigenschaften

- Die Verteilungen B(n;p) und B(n;1–p) sind zueinander symmetrisch bezüglich der Achse k = n/2
- B(n;0,5) ist in sich achsensymmetrisch bezüglich k = n/2
- Je größer n wird, desto breiter und niedriger wird die Verteilung. Das Maximum wandert dabei nach rechts.

2. Berechnung der wahrscheinlichsten Trefferzahl

Ist der Vorgänger kleiner als der Nachfolger, also B(n;p;k–1) < B(n;p;k), so verläuft der Graph von B(n;p) streng monoton wachsend und für den Bruch $X = \frac{B(n;p;k)}{B(n;p;k-1)}$ gilt : X > 1

Ist der Vorgänger größer als der Nachfolger, also B(n;p;k–1) > B(n;p;k), so verläuft der Graph von B(n;p) streng monoton fallend und für den Bruch $X = \frac{B(n;p;k)}{B(n;p;k-1)}$ gilt : X < 1

Sind zwei aufeinanderfolgende Werte der Binomialverteilung gleich groß, also B(n;p;k–1) = B(n;p;k), so gilt für den Bruch $X = \frac{B(n;p;k)}{B(n;p;k-1)}$: X = 1

$$X = \frac{B(n;p;k)}{B(n;p;k-1)} = \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{\binom{n}{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{\frac{1}{k \cdot 1} p \cdot 1}{\frac{1}{1(n-k+1)} \cdot 1 \cdot q} = \frac{(n-k+1)}{k} \cdot \frac{p}{q} =$$

$$= \left(\frac{n+1}{k} - \frac{k}{k}\right)\frac{p}{q} = \frac{(n+1)p - kp}{kq} = \frac{(n+1)p - k(1-q)}{kq} = \frac{(n+1)p - k + kq}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p - k}{kq}$$

Falls $X < 1$(also $(n + 1)p – k < 0$ oder $k < (n + 1)p$), steigt der Graph

Falls $X > 1$(also $(n + 1)p – k > 0$ oder $k > (n + 1)p$), fällt der Graph

Falls $X = 1$(also $(n + 1)p – k = 0$ oder $k = (n + 1)p$),
sind an den Stellen $k = (n+1)p$ und $k = (n + 1)p – 1$ benachbarte Maxima (nur wenn $(n+1)p$ ganzzahlig ist)

Ist $(n+1)p$ nicht ganzzahlig, so gibt es ein Maximum beim größten Wert von k unterhalb von $(n+1)p$

Beispiele:

Maximum von B(3;0,1):	$(n+1)\cdot p = (3 + 1)\cdot 0{,}1 = 0{,}4$;	also: Maximum bei $k = 0$
Maximum von B(3;0,9):	$(n+1)\cdot p = (3 + 1)\cdot 0{,}9 = 3{,}6$;	also: Maximum bei $k = 3$
Maximum von B(5;0,5):	$(n+1)\cdot p = (5 + 1)\cdot 0{,}5 = 3$;	also: Maxima bei $k = 3$ und $k =2$

3. Anwendung auf den „zweiseitigen Test“

Zwei Produkte X und Y sollen auf ihre Beliebtheit untersucht werden. Mit einer Stichprobe von 100 Verbrauchern, die sich für eines der Produkte entscheiden sollen, wird die Hypothese „Beide Produkte sind gleich beliebt“ auf dem Niveau 5% getestet.

Also: H_o: $p = 0{,}5$ $A = \{50 – k; 50 – k + 1; ...; 50; …; 50 + k – 1; 50 + k\}$
H_1 : $p \neq 0{,}5$ $\overline{A} = \{0; 1; 2; ... ; 50– k – 1; 50 + k + 1; ...; 100 \}$

Als Annahmebereich wählt man den um das Maximum bei 50 symmetrischen Bereich
Der Ablehnungsbereich ist auf beiden Seiten des Annahmebereichs zu finden.

Berechnung von k wegen Symmetrie:

$2\, P(Z \leq 50 – k – 1) < 0{,}05$
$P(Z \leq 50 – k – 1) < 0{,}025$
$50 + k + 1 <$ ____ ; $k =$ ___; d. h. Entscheidung für H_o, falls die Anzahl der gekauften

Produkte X zwischen ____ und ____ liegt.