§03. Stochastische Unabhängigkeit

1. Begriff

100 Studenten, unter denen sich 20 Raucher befinden, haben an einer Prüfung teilgenommen.
Folgende Ereignisse werden definiert:
R: „Der Student ist Raucher“
B: „Der Student hat die Prüfung bestanden.“

Fülle für folgende Fälle eine Viefeldertafel aus:

a) 2 Raucher und 70 Nichtraucher haben die Prüfung bestanden

Vierfeldertafel:

	R	$\overline{R}$	
B	2 %	70 %	72 %
$\overline{B}$	18 %	10%	28 %
	20 %	80 %	100 %

Die Ereignisse R und B sind offenbar abhängig.
Hier gilt:

$\frac{P(B\cap R)}{P(R)} \neq \frac{P(B)}{1}$ => $P(B\cap R) \neq P(B)\cdot P(R)$

b) 10 Raucher und 40 Nichtraucher haben die Prüfung bestanden

Vierfeldertafel:

	R	$\overline{R}$	
B	10 %	40 %	50 %
$\overline{B}$	10 %	40 %	50 %
	20 %	80 %	100 %

Die Ereignisse R und B sind offenbar unabhängig.

Hier gilt:

$\frac{P(B\cap R)}{P(R)} = \frac{P(B)}{1}$ => $P(B\cap R) = P(B)\cdot P(R)$

> Definition
> Zwei Ereignisse A und B heißen *stochastisch unabhängig*, wenn für sie die Produktregel
> $P(A)\cdot P(B) = P(A\cap B)$ gilt.
> Andernfalls heißen die Ereignisse *stochastisch abhängig*.

2. Unabhängigkeit der Gegenereignisse

Seien A und B unabhängige Ereignisse. Sind die Ereignisse $\overline{A}$ und B auch unabhängig?

Lösung:

Für das Gegenereignis von A gilt: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)\cdot P(B) = P(B)\cdot(1 - P(A)) = P(B)\cdot P(\overline{A})$

$\Rightarrow$ $\overline{A}$ und B sind stochastisch unabhängig

Ebenso ergibt sich:

> A und B unabhängig $\Leftrightarrow$ A und $\overline{B}$ unabhängig $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ und B unabhängig $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ und $\overline{B}$ unabhängig

3. Beispiel

Sind die Ereignisse
A: „Beim Würfeln fällt eine gerade Augenzahl" und
B: „Es fällt eine Primzahl"
stochastisch unabhängig?

Lösung:

$\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ $A = \{2;4;6\}$ $B = \{2;3;5\}$ $A \cap B = \{2\}$

$P(A) = ½$ $P(B) = ½$ $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$P(A)\,P(B) = ½ \cdot ½ = ¼$

Also: $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$ A und B sind stochastisch abhängig.

4. Vierfeldertafel für unabhängige Ereignisse

Gegeben sind die unabhängigen Ereignisse A und B mit P(A) = 20% und $P(A \cap B)$ = 10%.
Fülle eine vollständige Vierfeldertafel aus

Lösung:

	A	$\overline{A}$	
B	*10%*	10%	*25%*
$\overline{B}$	30%	45%	75%
	40%	60%	*100%*

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{10\%}{20\%} = \frac{1}{2} = 50\%$$

5. Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse

Die Ereignisse A, B und C heißen *stochastisch unabhängig*, wenn folgende Gleichungen erfüllt sind:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$