§06. Die Binomialverteilung

1. Bernoullikette

Definition:
Eine Menge von Ereignissen $A_1, A_2, \ldots A_n$ heißt *Bernoullikette der Länge n,* wenn
1. die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots A_n$ unabhängig sind und
2. alle Ereignisse A_i die gleiche Wahrscheinlichkeit haben:
$$P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = p$$
p heißt *Parameter der Bernoullikette.*

Bemerkung: Bei einer Bernoullikette gibt es nur 2 Ausgänge: *Treffer* (mit Wahrscheinlichkeit p) oder *Niete* (mit Wahrscheinlichkeit q = 1– p).

Beispiele:

① *n-maliger Würfelwurf:*
A_i : „Keine 6 beim i-ten Wurf" p =5/6

② *Stichprobe mit Zurücklegen* (Typisches Modell für Bernoulli-Kette):
A_i: „Das i-te entnommene Stück ist Ausschuss" p: Ausschusswahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit:
Ist die Nummer der Züge mit Treffer vorgegeben (z.B. „Nur beim 1., 3. und 5 Versuch ein Treffer"), so ist die Wahrscheinlichkeit, bei n Versuchen genau k Treffer zu erzielen:

$$P(X = k) = p^k(1-p)^{n-k}$$

Ist die Nummer der Züge mit Treffer nicht vorgegeben (z.B. „Bei genau 3 Versuchen ein Treffer") , so ist die Wahrscheinlichkeit, bei n Versuchen genau k Treffer zu erzielen:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Beispiele:

① Berechne die Wahrscheinlichkeit, beim fünfmaligen Würfeln

a) nur beim 1. und 3. Wurf eine 6 zu haben:

$$n = 5;\ k = 2;\ p = \frac{1}{6} \qquad P(X = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1{,}61\ \%$$

b) nur beim 1. und 3. Wurf eine gerade Zahl zu haben.

$$n = 5;\ k = 2;\ p = \frac{1}{2} \qquad P(X = 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3{,}13\ \%$$

c) bei genau 2 Würfen eine 6 zu haben.

$$n = 5;\ k = 2;\ p = \frac{1}{6} \qquad P(X = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 16{,}1\ \%$$

② Bei der Produktion der Bierkrüge für das Annafest ist der Ausschussanteil 5%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit unter 10 Krügen genau 2mal Ausschuss vorzufinden?

$$n = 10;\ k = 2;\ p = 0{,}05 \qquad P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^8 = 7{,}46\ \%$$

(Beachte: Bei großer Anzahl N (hier von produzierten Krügenverwendet man das Modell „mit Zurücklegen")

2. Binomialverteilung

Definition:
Jede Wahrscheinlichkeitsverteilung

$B(n;p)$: $k \rightarrow B(n;p;k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ $\qquad k = 0;1;2;...n$

heißt *Binomialverteilung*.

Beispiele:
Aus einer Urne mit 3 weißen und 7 schwarzen Kugeln werden 10 Kugeln mit Zurücklegen entnommen. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:

1. Genau 3 weiße Kugeln werden gezogen: $n = 10 \quad p = 0{,}3$ (weiß)

   $P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^7 = 26{,}7\ \%$

2. keine weiße Kugel wird gezogen:

   $P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{10} = 2{,}83\ \%$

3. Höchstens 1 weiße Kugeln wird gezogen:

   $P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}0283 + \binom{10}{1} \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^9 = 14{,}9\ \%$

4. Höchstens 9 weiße Kugeln werden gezogen:

   $P(X \le 9) = 1 - P(X = 10) = 1 - \binom{10}{10} \cdot 0{,}3^{10} \cdot 0{,}7^0 = 99{,}999\ \%$

5. Mehr als 5 aber höchstens 7 weiße Kugeln werden gezogen:

   $P(5 < X \le 7) = P(X = 6) + P(X = 7) = \binom{10}{6} \cdot 0{,}3^6 \cdot 0{,}7^4 + \binom{10}{7} \cdot 0{,}3^7 \cdot 0{,}7^3 = 4{,}58\ \%$

3. Mindestens- Mindestens-Mindestens-Aufgabe

Wie oft muss man einen Laplace-Würfel *mindestens* werfen, damit mit *mindestens* 98% Wahrscheinlichkeit *mindestens* eine 6 fällt?

$p = \frac{1}{6}$, n gesucht

$P(X \ge 1) \ge 0{,}98$

$1 - P(X = 0) \ge 0{,}98$ (Gegenereignis)

$-P(X = 0) \ge -0{,}02 \mid \cdot(-1)$

$P(X = 0) \le 0{,}02$

$\binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \le 0{,}02$

$1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \le 0{,}02 \mid \ln...$

$n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \le \ln 0{,}02 \mid : \ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$

$n \ge \frac{\ln 0{,}02}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$

$n \ge 21{,}4$

Man muss mindestens 22mal würfeln.

4. Hinweise zum Umgang mit dem Tafelwerk

P(X = k) „genau k Treffer“

Verwende die Spalten „B(n;p;k)“ und suche erst p, dann n und k heraus.
Schreibe: $P(X = k) = \quad B(n;p;k) = ...$

Beispiel:

10mal Würfeln: Wahrscheinlichkeit genau 4 gerade Augenzahlen
$n = 10; p = 0{,}5; k = 4$
$P(X = 4) = \quad B(10;\ 0{,}5;\ 4) = 20{,}5\%$

P(X ≤ k) „höchstens k Treffer“

Verwende die Spalten „ $\sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$ “ und erst p, dann n und k heraus.

Schreibe: $P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} B(n;p;i) = ...$

Beispiel:

10mal Würfeln: Wahrscheinlichkeit höchstens 4 gerade Augenzahlen
$n = 10; p = 0{,}5; k = 4$
$P(X \le 4) = \sum_{i=0}^{4} B(10;0{,}5;i) = 37{,}7\%$

Sonstige

Alle anderen Wahrscheinlichkeiten müssen auf $P(X \le k)$ zurückgeführt werden:

„Weniger als 4“:	$P(X < 5) = P(X \le 4)$
„Mehr als 5“:	$P(X > 5) = 1 - P(X \le 5)$
„Mindestens 9“:	$P(X \ge 9) = 1 - P(X \le 8)$
„Mindestens 7 aber höchstens 15“:	$P(7 \le X \le 15) = P(X \le 15) - P(X \le 6)$
„Mehr als 7 aber höchstens 15“:	$P(7 < X \le 15) = P(X \le 15) - P(X \le 7)$
„Mehr als 7 aber weniger als 15“:	$P(7 < X < 15) = P(X \le 14) - P(X \le 7)$

Achtung: Nicht für alle Wahrscheinlichkeiten kann das Tafelwerk verwendet werden!!!!

5. Erwartungswert und Varianz

Wir wissen: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$ heißt Erwartungswert der Zufallsgröße X.
$Var(X) = E([X–E(X)]^2)$ heißt Varianz der Zufallsgröße X.

Bernoulli-Kette: Dem j-ten Bernoulli-Experiment wird die Zufallsgröße X_j zugeordnet, die die Werte 1 (Treffer) oder 0 (Niete) annehmen kann.

x_i	0	1
$P(X_j=x_i)$	q	p

Es gilt: Alle X_j sind unabhängig und
$E(X_j) = 0q + 1p = p$
$Var(X_j) = E(X_i – p)^2 = q\,(0 – p)^2 + p\,(1 – p)^2 = (1 – p)\,p^2 + p\,(1 – p)^2 =$
$= (1 – p)(p^2 + p – p^2) = (1 – p)\,p = qp$

Die Zufallsgröße $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ beschreibt dann die Anzahl der Treffer. Mit den Summenformeln
$E(X) = E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n) = E(X_j) = np$
$Var(X) = Var(X_1 + X_2 + ... + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + ... + Var(X_n) = nVar\,(X_j) = npq$

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit Parameter p und q = 1 – p gilt:

$E(X) = np$

$Var(X) = npq$

$\sigma = \sqrt{npq}$