Stochastische Paradoxa

1. Das Paradoxon des Rundumsiegens (S. 105/44)

Drei L-Würfel haben die Beschriftungen: Würfel I : "1,4,4,4,4,4"
Würfel II : "2,2,2,5,5,5"
Würfel III: "3,3,3,3,3,6"

a) Wahrscheinlichkeit, das die mit dem ersten Würfel erhaltene Augenzahl niedriger als die des zweiten Würfels ist:

$$P(A)=\frac{1}{6}\cdot 1+\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{12}=\frac{21}{36}\approx 58{,}33\ \%$$

b) Wahrscheinlichkeit, das die mit dem zweiten Würfel erhaltene Augenzahl niedriger als die des dritten Würfels ist:

$$P(B)=\frac{1}{2}\cdot 1+\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{7}{12}=\frac{21}{36}\approx 58{,}33\ \%$$

c) Wahrscheinlichkeit, das die mit dem dritten Würfel erhaltene Augenzahl niedriger als die des ersten Würfels ist:

$$P(C)=\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{25}{36}\approx 69{,}44\ \%$$

Bei einem Spiel, bei dem man eine größere Augenzahl als ein anderer Spieler würfeln will, ist somit die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, wenn der andere zuerst seinen Würfel aussucht, größer als 50%, egal, welchen Würfel er gewählt hat, solange man selbst den entsprechenden "Gewinner"-Würfel wählt.

2. Das Paradoxon der fast sicheren Ereignisse (S. 214 f.)

Die Wahrscheinlichkeit, bei zwei Bernoulli-Ketten gleicher Länge und mit den Trefferwahrscheinlichkeiten 99 % und 99,99% im Modell Ziehen mit Zurücklegen nur Treffer zu erzielen:

bei n= 100:

p=99% : $P(X=100)=0{,}99^{100}\approx 36{,}60\ \%$

p=99,99%: $P(X=100)=0{,}9999^{100}\approx 99{,}00\ \%$

bei n=200:

p=99% : $P(X=200)=0{,}99^{200}\approx 13{,}40\ \%$

p=99,99%: $P(X=200)=0{,}9999^{200}\approx 98{,}02\ \%$

Eine relativ kleine Differenz zwischen den Trefferwahrscheinlichkeiten kann sich also bei langen Bernoulli-Ketten sehr stark auswirken.

3. Das Paradoxon von de Mére (S. 215 f.)

Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel bei 4 Würfen mindestens eine 6 zu würfeln:

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 51{,}77 \ \%$$

Annahme: Die Wahrscheinlichkeit, bei 24 Würfen mit zwei Würfeln einen Sechser-Pasch zu erhalten, ist genauso groß, da die W., zwei Sechser zu würfeln ein Sechstel der W. für einen Würfel ist und die Anzahl der Würfe sechsmal größer als beim vorherigen Versuch ist.

Aber für p= $\frac{1}{36}$ und n=24 ergibt sich:

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 49{,}14 \ \%$$

4. Geburtstagsparadoxon

Wenn die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei von 20 Personen in einem Raum am selben Tag Geburtstag haben, abgeschätzt wird, nimmt man intuitiv eine wesentlich niedrigere W. an (zwischen 1% und max. 5%) , als eigentlich der Fall ist:

$$P(A) = \binom{20}{2} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{365}\right) \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{18} \approx 49{,}55 \ \%$$

Diese Wahrscheinlichkeit sinkt jedoch extrem, wenn die zwei Personen an einem ganz bestimmten Tag Geburtstag haben sollen:

$$P(B) = \binom{20}{2} \cdot \left(\frac{1}{365}\right)^2 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{18} \approx 0{,}14 \ \%$$