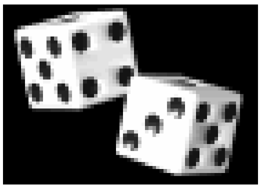
Mathematik Grundkurs
Wahrscheinlichkeitsrechnung



Unterrichtsskript
nach bayerischem Lehrplan G9

I. GRUNDLAGEN

§01 Zufallsexperimente

Hängt der Ausgang eines Experiments vom Zufall ab, so spricht man vom Zufallsexperiment.

Beispiele

1. Münzwurf (Ausgänge: Kopf; Zahl)
2. Roulette (0; 1; 2;...;36)
3. Würfeln (Ausgänge: 1; 2; 3; 4; 5; 6)

Definition

Eine Menge $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots \omega_n\}$ heißt *Ergebnisraum* eines Zufallsexperiments, wenn jedem Versuchsausgang höchstens ein Element aus Ω zugeordnet ist. Die Elemente $\omega_1; \omega_2; \ldots \omega_n$ heißen *Ergebnisse* des Zufallsexperiments.
Die Anzahl der Elemente von Ω heißt *Mächtigkeit von Ω* und wird mit $|\Omega|$ bezeichnet.

Beispiele

1. Münzwurf: $\Omega = \{K; Z\};|\Omega| = 2$
2. Roulette: $\Omega = \{0; 1; 2;...;36\}$; $|\Omega| = 37$
3. Würfeln: $\Omega = \{1;23; 4; 5; 6\}$; $|\Omega| = 6$,

Definition

Jede Teilmenge A eines Ergebnisraums Ω heißt *Ereignis*.
Die Menge aller Ereignisse heißt *Ereignisraum*.

Stellt sich ein Versuchsergebnis ein, das in A enthalten ist, so sagt man: „Das Ereignis A tritt ein."
Die Teilmenge Ω heißt auch *sicheres Ereignis* und die leere Menge $\emptyset$ heißt *unmögliches Ereignis*.
Oft wird ein Ereignis auch durch Worte beschrieben.

Beispiele

1. Münzwurf:

$A = \{K\}$	A: „Es fällt Kopf"	$\|A\| = 1$
$B = \{K; Z\}$	A: „Es fällt Kopf oder Zahl"	$\|B\| = 2$

2. Roulette:

$A = \{1; 2;...12\}$	A:„Es fällt eine Zahl aus dem 1. Dutzend";	$\|A\| = 12$
$A = \{13\}$	B:„Es fällt die 13";	$\|B\| = 1$

3. Würfeln:

$A = \{(1;2);(2;1)\}$	A:„Die Augensumme beträgt 3.";	$\|A\| = 2$
$B = \{1;3;5\}$	A:„Es fällt eine ungerade Zahl."	$\|B\| = 3$

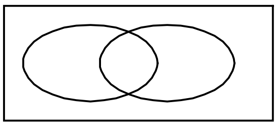
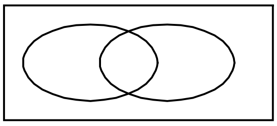
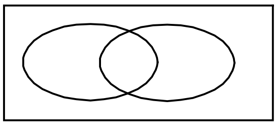
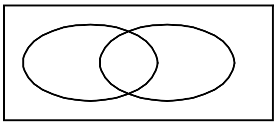
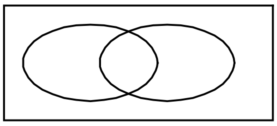
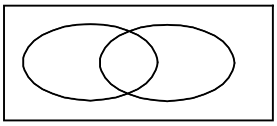
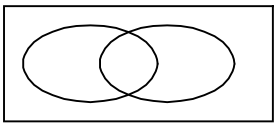
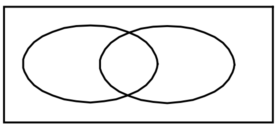
§02 Ereignisalgebra

Wir betrachten beim Würfeln die Ereignisse
A: „Es fällt eine gerade Zahl“
B: „Es fällt eine Primzahl“
$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

A = ____________________

B = ____________________

Darstellung als Diagramm:

Sprechweise:	Schreibweise:	Diagramm:
♣ Das Ereignis A...		
♣ Nicht das Ereignis A... ♣ Das Gegenereignis zu A...		
♣ Ereignis A und B... ♣ beide Ereignisse...		
♣ Nur das Ereignis A...		
♣ Ereignis A oder B... ♣ mindestens eines der beiden Ereignisse...		
♣ Weder A noch B... ♣ keines der beiden Ereignisse...		
♣ Höchstens ein Ereignis... ♣ Nicht beide Ereignisse...		
♣ Genau eines der beiden Ereignisse ... ♣ Entweder nur A oder nur B...		

.... tritt (treten) ein

Definition:
2 Ereignisse A und B heißen unvereinbar, wenn gilt: $A \cap B = \varnothing$

§03 Relative Häufigkeit

<u>Definition</u>
Tritt ein Ereignis A bei n Versuchen k-mal ein, so heißt $h_n(A) = k/n$
die relative Häufigkeit des Ereignisses A.

<u>Beispiel:</u>

<u>(Absolute) Häufigkeiten der Ergebnisse beim Würfeln (60 Versuche):</u>

Zahl:	1	2	3	4	5	6
Anzahl:	10	10	10	10	10	10

<u>Relative Häufigkeiten:</u>

$h_{60}(\{1\}) = 1/6 = 16{,}7\ \%$; $h_{60}(\{2\}) = 1/6 = 16{,}7\ \%$; $h_{60}(\{3\}) = 1/6 = 16{,}7\ \%$;

$h_{60}(\{4\}) = 1/6 = 16{,}7\ \%$; $h_{60}(\{5\}) = 1/6 = 16{,}7\ \%$; $h_{60}(\{6\}) = 1/6 = 16{,}7\ \%$

<u>Eigenschaften:</u>

① $0 \le h_n(A) \le 1$

A: „Es fällt eine gerade Zahl“
$A = \{2;4;6\}$
$h_{60}(A) = h_{60}(\{2\}) + h_{60}(\{4\}) + h_{60}(\{6\}) = 50{,}0\ \%$

② $h_n(A) = \Sigma h_n(\{\omega\})\ (\omega \in A)$

③ $h_n(\varnothing) = 0$

④ $h_n(\Omega) = 1$

B: „Es fällt eine Zahl kleiner als 6“
$B = \{1;2;3;4;5\}$
$h_{60}(A) = h_{60}(\{1\}) + h_{60}(\{2\}) + h_{60}(\{3\}) + h_{60}(\{4\}) + h_{60}(\{5\}) = 1 - h_{60}(\{6\})$

⑤ $h_n(A) = 1 - h_n(\overline{A})$

$A \cup B$: „Es fällt eine gerade Zahl oder eine Zahl kleiner als 6“ $(A \cup B = \Omega)$
$A \cap B$: „Es fällt eine gerade Zahl , die kleiner als 6 ist“ $A \cup B = \{2;\ 4\}$

$h_{60}(A \cup B) = h_{60}(\{2\}) + h_{60}(\{4\}) = h_{60}(A) + h_{60}(B) - h_{60}(A \cap B)$

⑥ $h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B) - h_n(A \cap B)$

Die Eigenschaften kommen bei der *Vierfeldertafel* zur Anwendung:

	A	$\overline{A}$	
B	$h_n(A \cap B)$	$h_n(\overline{A} \cap B)$	$h_n(B)$
$\overline{B}$	$h_n(A \cap \overline{B})$	$h_n(\overline{A} \cap \overline{B})$	$h_n(\overline{B})$
	$h_n(A)$	$h_n(\overline{A})$	1

Beispiel

Im Grundkurs M sind 18 Schüler.
A: „blonde Schüler“: $h_{18}(A) =$ ______
B: „Schüler, die ein Musikinstrument spielen“ $h_{18}(B) =$ ____
Außerdem ist gegeben: $h_{18}(A \cap B) =$ ______
Berechne mit einer Vierfeldertafel die restlichen relativen Häufigkeiten.

	A	$\overline{A}$	
B			
$\overline{B}$			

§04 Kombinatorik

1. Zahlenschlossproblem

Anzahl der Möglichkeiten, auf jeden von n Plätzen je eines von jeweils $k_1, k_2, ..., k_n$ unterscheidbaren Elementen zu legen:

k_1	k_2	...	k_n

$\boxed{|\Omega| = k_1\, k_2 \ldots k_n}$ (Produktregel)

Sonderfall: Bei jeweils gleicher Anzahl $k = k_1 = k_2 = ...= k_n$

$\boxed{|\Omega| = k^n}$ (Anzahl der k-Tupel einer n-Menge)

2. Klassenfotoproblem (Anzahl der Permutationen aus einer n-Menge)

Anzahl der Möglichkeiten, auf n Plätze n unterscheidbare Elemente zu verteilen:

n	n-1	...	1

$\boxed{|\Omega| = n\cdot(n-1)\cdot(n-2) \ldots 3\cdot2\cdot1 = n!}$

Abkürzung: $\boxed{n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}$ Außerdem ist festgelegt: $\boxed{0! = 1}$ und $\boxed{1! = 1}$

z.B. $4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$; $6!/6 = 5! = 5\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$; $6!/5! = 6$

3. Wettlaufproblem (Anzahl der k-Permutationen aus einer n-Menge)

Anzahl der Möglichkeiten, auf n Plätze k (k < n) unterscheidbare Elemente zu verteilen:

$\boxed{|\Omega| = n(n-1)(n-2) \ldots(n-k+1)}$

oder: $$|\Omega| = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) \quad \cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}{(n-k)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$\boxed{|\Omega| = n!/(n-k)!}$ TR: n $\boxed{\text{nPr}}$ k

4. Lottoproblem (Anzahl der k-Teilmengen aus einer n-Menge)

Anzahl der Möglichkeiten, auf n Plätze k ($k \le n$) nicht unterscheidbare Elemente zu verteilen:

$\boxed{|\Omega| = n!/(n-k)!k!}$

(k! Möglichkeiten des Wettlaufproblems schrumpfen zu einer einzigen zusammen)

Abkürzung: $\boxed{\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}}$ (*Binomialkoeffizient* „k aus n“ bzw. „n über k“) TR: n $\boxed{\text{nCr}}$ k

z.B. $\binom{49}{6} = 13983816$

5. MISSISSIPPI-Problem

Anzahl der Möglichkeiten, unterscheidbare Gruppen von jeweils $k_1, k_2 ,..., k_m$ nicht unterscheidbaren Elementen auf n ($n = k_1 + k_2 + ...+ k_m$)Plätze zu verteilen:

$|\Omega| = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\dots\binom{k_m}{k_m}$ oder $|\Omega| = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$ (Umformung s. Blatt!)

II. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

§05 Definition und Eigenschaften

Definition:
Eine Funktion P: A → P(A) mit A ∈ P(Ω) und P(A) ∈ IR heißt *Wahrscheinlickeitsverteilung*, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:
1. Für ein beliebiges Ereignis gilt: $P(A) \geq 0$ (*Nichtnegativität*)
2. Für das sichere Ereignis gilt: $P(\Omega) = 1$ (*Normiertheit*)
3. Für zwei unvereinbare Ereignisse A und B gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Man nennt die Zahl P(A) „Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A".

Wiederholt man das Experiment sehr oft, so stellt man fest, dass die relative Häufigkeit eines jeden Elementarereignisses {ω} sich einem bestimmten Wert annähert. Diesen Wert verwendet man als die jeweilige Wahrscheinlichkeit.

Beispiele: *Werfen eines Laplace-Würfels (idealer W.)*

ω	1	2	3	4	5	6
P({ω})	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Werfen einer L-Münze:

ω	K	Z
P({ω})	½	½

Glücksrad

ω	G (grün)	B (blau)	R (Rot)
P({ω})	½	¼	¼

Aufgrund dieser Festlegung lassen sich alle Eigenschaften der relativen Häufigkeit auch auf die Wahrscheinlichkeiten übertragen (s. §3)

① $0 \leq P(A) \leq 1$ ② a) $P(A) = \Sigma P(\{\omega\})$ $(\omega \in A)$

Damit folgt für unvereinbare Ereignisse $A_1, A_2, \dots, A_n$:

② b) $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots P(A_n)$ $(\omega \in A)$

③ $P(\emptyset) = 0$ ④. $P(\Omega) = 1$ ⑤. $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ ⑥. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Vierfeldertafel: ....

Definition:
Ein stochastisches Experiment heißt *Laplace-Experiment*, wenn alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen.

Für Laplace-Experimente gilt:

$P(A) = |A|/|\Omega|$

$$\mathbf{P(A) = \frac{Anzahl\ der\ für\ A\ günstigen\ Ergebnisse}{Anzahl\ der\ möglichen\ gleichwahrscheinlichen\ Ergebnisse}}$$

§06 Das Urnenmodell

In einer Urne befinden sich N Kugeln, von denen K eine bestimmte Eigenschaft besitzen (z.B. sie sind schwarz). Zieht man nun n Kugeln, so interessiert man sich für die Wahrscheinlichkeit „genau k Kugeln sind schwarz“. Dabei muss man die Art des Ziehens unterscheiden.

Beispiel: 10 Kugeln, von denen 8 schwarz und 2 weiß sind, befinden sich in der Urne. Wie groß ist die W., genau 2 schwarze zu ziehen, wenn 3 Kugeln gezogen werden?
N = 10, K = 8, n = 3, k = 2

1. Ziehen mit Zurücklegen:

$$P(Z=2)=\frac{\binom{3}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 8}{10\cdot 10\cdot 10}=\binom{3}{2}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{10}=\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^1$$

Damit:

$$P(Z=k)=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{K}{N}\right)^k\cdot\left(1-\frac{K}{N}\right)^{n-1}=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-1}$$

p = K/N ist die „Elementarwahrscheinlichkeit“ (Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Zug eine schwarze Kugel zu erhalten)

2. Ziehen ohne Zurücklegen:

$|\Omega|=\binom{10}{3}$ $\quad |A|=\binom{8}{2}\binom{2}{1}$ $\quad$ Also: $P(Z=2)=\frac{\binom{8}{2}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}}$

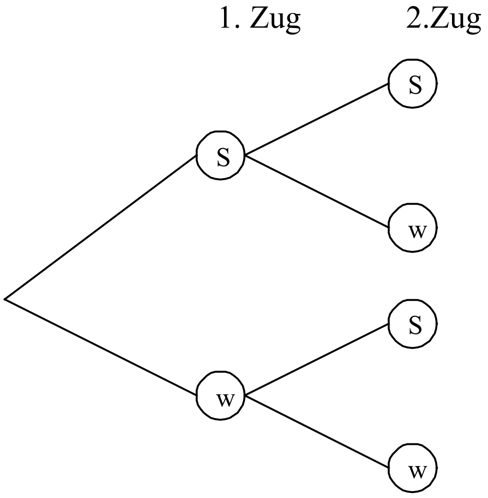
Damit:

$$P(Z=k)=\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

3. Ziehen mit besonderen Bedingungen:

Beispiel:
Wird eine schwarze Kugel gezogen, so wird diese und eine zusätzliche schwarze Kugel der Urne entnommen, wird eine rosa Kugel gezogen, so wird diese und eine zusätzliche rosa Kugel in die Urne gelegt. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse beim 2maligen Ziehen.

Lösung mit Baumdiagramm



Erkenntnis:

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten auf Ästen, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen, ist stets 1.

1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses in einem mehrstufigen Zufallsexperiment ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad, der zu diesem Elementarereignis führt.

Damit ergibt sich folgende Verteilung:

ω	(ss)	(sw)	(ws)	(ww)
P({ω})				

2. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich die Summe der Wahrscheinlichkeit der Pfade, die zu diesem Ereignis führen.

§07 Stochastische Unabhängigkeit

100 Studenten, unter denen sich 20 Raucher befinden, haben an einer Prüfung teilgenommen.
Folgende Ereignisse werden definiert:
R: „Der Student ist Raucher“
B: „Der Student hat die Prüfung bestanden.“

Fülle für folgende Fälle eine Vierfeldertafel aus:

a) 2 Raucher und 70 Nichtraucher haben die Prüfung bestanden

Vierfeldertafel:

	R	$\overline{R}$	
B	2 %	70 %	72 %
$\overline{B}$	18 %	10%	28 %
	20 %	80 %	100 %

Die Ereignisse R und B sind offenbar abhängig.
Hier gilt:
$\frac{P(B\cap R)}{P(R)} \neq \frac{P(B)}{1} \Rightarrow P(B\cap R) \neq P(B)\cdot P(R)$

b) 10 Raucher und 40 Nichtraucher haben die Prüfung bestanden

Vierfeldertafel:

	R	$\overline{R}$	
B	10 %	40 %	50 %
$\overline{B}$	10 %	40 %	50 %
	20 %	80 %	100 %

Die Ereignisse R und B sind offenbar unabhängig.
Hier gilt:
$\frac{P(B\cap R)}{P(R)} = \frac{P(B)}{1} \Rightarrow P(B\cap R) = P(B)\cdot P(R)$

<u>Definition</u>
Zwei Ereignisse A und B heißen *stochastisch unabhängig*, wenn für sie die Produktregel
$P(A)\cdot P(B) = P(A\cap B)$ gilt.
Andernfalls heißen die Ereignisse *stochastisch abhängig*.

Unabhängigkeit der Gegenereignisse
Seien A und B unabhängige Ereignisse. Sind die Ereignisse $\overline{A}$ und B auch unabhängig?

<u>Lösung:</u>
Für das Gegenereignis von A gilt: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)\cdot P(B) = P(B)\cdot(1 - P(A)) = P(B)\cdot P(\overline{A})$
$\Rightarrow$ $\overline{A}$ und B sind stochastisch unabhängig

Ebenso ergibt sich:

A und B unabhängig $\Leftrightarrow$ A und $\overline{B}$ unabhängig $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ und B unabhängig $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ und $\overline{B}$ unabhängig

Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse:

Die Ereignisse A, B und C heißen *stochastisch unabhängig*, wenn folgende Gleichungen erfüllt sind:

$P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B)$
$P(B \cap C) = P(B)\cdot P(C)$
$P(A \cap C) = P(A)\cdot P(C)$

$$P\ (A \cap B \cap C) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

Beispiel:

Sind die Ereignisse
A: „Beim Würfeln fällt eine gerade Augenzahl“ und
B: „Es fällt eine Primzahl“
stochastisch unabhängig?

Lösung:

$\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ $A = \{2;4;6\}$ $B = \{2;3;5\}$

$A \cap B = \{2\}$

$P(A) = ½$ $P(B) = ½$ $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$P(A)\ P(B) = ½ \cdot ½ = ¼$

Also: $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$ A und B sind stochastisch abhängig.

Vierfeldertafel für unabhängige Ereignisse:
Gegeben sind die unabhängigen Ereignisse A und B mit $P(A) = 20\%$ und $P(A \cap B) = 10\%$.
Fülle eine vollständige Vierfeldertafel aus

Lösung:

	A	$\overline{A}$	
B	*10%*	40%	50%
$\overline{B}$	10%	40%	50%
	20%	80%	*100%*

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{10\%}{20\%} = \frac{1}{2} = 50\%$$

§08 Die Binomialverteilung

1. Bernoullikette

Definition:
Eine Menge von Ereignissen A_1, A_2,...A_n heißt *Bernoullikette der Länge n*, wenn
1. die Ereignisse A_1, A_2,...A_n unabhängig sind und
2. alle Ereignisse A_i die gleiche Wahrscheinlichkeit haben:
$$P(A_1) = P(A_2) = ... = P(A_n) = p$$
p heißt *Parameter der Bernoullikette*.

Beispiele:

1. *n-maliger Würfelwurf:*
   A_i : „Keine 6 beim i-ten Wurf“ p =5/6
2. *Stichprobe mit Zurücklegen:*
   A_i: „Das i-te entnommene Stück ist Ausschuss“ p: Ausschusswahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit:
Ist die Nummer der Züge mit Treffer vorgegeben (z.B. „Nur beim 1., 3. und 5 Versuch ein Treffer“), so ist die Wahrscheinlichkeit, bei n Versuchen genau k Treffer zu erzielen:

$$P(X = k) = p^k(1-p)^{n-k}$$

Ist die Nummer der Züge mit Treffer nicht vorgegeben (z.B. „Bei genau 3 Versuchen ein Treffer“) , so ist die Wahrscheinlichkeit, bei n Versuchen genau k Treffer zu erzielen:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Beispiele:

1. Berechne die Wahrscheinlichkeit, beim fünfmaligen Würfeln
   a) nur beim 1. und 3. Wurf eine 6 zu haben:
   $$n = 5;\ k = 2;\ p = \frac{1}{6} \qquad P(X = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1{,}61\ \%$$
   b) nur beim 1. und 3. Wurf eine gerade Zahl zu haben.
   $$n = 5;\ k = 2;\ p = \frac{1}{2} \qquad P(X = 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3{,}13\ \%$$
   c) bei genau 2 Würfen eine 6 zu haben.
   $$n = 5;\ k = 2;\ p = \frac{1}{6} \qquad P(X = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 16{,}1\ \%$$
2. Bei der Produktion der Bierkrüge für die Bergkirchweih ist der Ausschussanteil 5%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit unter 10 Krügen genau 2mal Ausschuss vorzufinden?
   $$n = 10;\ k = 2;\ p = 0{,}05 \qquad P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^8 = 0{,}166\ \%$$
   (Beachte: Bei großer Anzahl N verwendet man das Modell „mit Zurücklegen“)

2. Binomialverteilung

Definition:
Jede Wahrscheinlichkeitsverteilung

B(n;p): k → B(n;p;k) = $\binom{n}{k}\cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ k = 0;1;2;...n

heißt *Binomialverteilung*.

Beispiele:
Aus einer Urne mit 3 weißen und 7 schwarzen Kugeln werden 10 Kugeln mit Zurücklegen entnommen. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:

1. Genau 3 weiße Kugeln werden gezogen: n = 10 p = 0,3 (weiß)

   $P(X = 3) = \binom{10}{3}\cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^7 = 26{,}7\ \%$

2. keine weiße Kugel wird gezogen:

   $P(X = 0) = \binom{10}{0}\cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{10} = 2{,}83\ \%$

3. Höchstens 1 weiße Kugeln wird gezogen:

   $P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}0283 + \binom{10}{1}\cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^9 = 10{,}4\ \%$

4. Höchstens 9 weiße Kugeln werden gezogen:

   $P(X \le 9) = 1 - P(X = 10) = 1 - \binom{10}{10}\cdot 0{,}3^{10} \cdot 0{,}7^0 = 99{,}999\ \%$

5. Mehr als 5 aber höchstens 7 weiße Kugeln werden gezogen:

   $P(5 < X \le 7) = P(X = 6) + P(X = 7) = \binom{10}{6}\cdot 0{,}3^6 \cdot 0{,}7^4 + \binom{10}{7}\cdot 0{,}3^7 \cdot 0{,}7^3 = 4{,}58\ \%$

3. Drei-Mindestens-Aufgabe:

Wie oft muss man einen Laplace-Würfel *mindestens* werfen, damit mit *mindestens* 98% Wahrscheinlichkeit *mindestens* eine 6 fällt?

$p = \frac{1}{6}$, n gesucht

$P(X \ge 1) \ge 0{,}98$

$1 - P(X = 0) \ge 0{,}98$ (Gegenereignis)

$-P(X=0) \ge -0{,}02 \mid \cdot(-1)$

$P(X=0) \le 0{,}02$

$\binom{n}{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n \le 0{,}02$

$1\cdot 1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n \le 0{,}02 \mid \ln\ldots$

$n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \le \ln 0{,}02 \mid : \ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$

$n \ge \frac{\ln 0{,}02}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$

$n \ge 21{,}4$

Man muss mindestens 22mal würfeln.

Aufgaben: S. 79

4. Hinweise zum Umgang mit dem Tafelwerk

- P(X = k) „genau k Treffer"

  Verwende die Seiten „Binomialverteilung" und suche n, p und k heraus.

  Schreibe: $P(X = k) = \quad B(n;p;k) = ...$

  Beispiel:

  10mal Würfeln: Wahrscheinlichkeit genau 4 gerade Augenzahlen

  $n = 10;\ p = 0{,}5;\ k = 4$

  $P(X = 4) = \quad B(10;\ 0{,}5;\ 4) = 20{,}5\%$

- $P(X \leq k)$ „höchstens k Treffer"

  Verwende die Seiten „kumulative Binomialverteilung" und suche n, p und k heraus.

  Schreibe: $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} B(n; p; i) = ...$

  Beispiel

  10mal Würfeln: Wahrscheinlichkeit höchstens 4 gerade Augenzahlen

  $n = 10;\ p = 0{,}5;\ k = 4$

  $P(X \leq 4) = \sum_{i=0}^{4} B(10; 0{,}5; i) = 37{,}7\%$

- Sonstige

  Alle anderen Wahrscheinlichkeiten müssen auf $P(X \leq k)$ zurückgeführt werden:

  „Weniger als 4": $P(X < 4) = P(X \leq 4)$

  „Mehr als 5": $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5)$

  „Mindestens 9": $P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8)$

  „Mindestens 7 aber höchstens 15": $P(7 \leq X \leq 15) = P(X \leq 15) - P(X \leq 6)$

  „Mehr als 7 aber höchstens 15": $P(7 < X \leq 15) = P(X \leq 15) - P(X \leq 7)$

  „Mehr als 7 aber weniger als 15": $P(7 < X < 15) = P(X \leq 14) - P(X \leq 7)$

Achtung: Nicht für alle Wahrscheinlichkeiten kann das Tafelwerk verwendet werden!!!!

III GRUNDLAGEN DER STATISTIK

§09 Alternativtests

Problem

Zwei unterschiedliche Behauptungen (Hypothesen) sollen mit Hilfe einer Stichprobe auf ihre Richtigkeit untersucht werden.

Beispiel

Eine Firma behauptet, 20% der von ihr hergestellten Gummibärchen seien rot, während der Verbraucherschutz behauptet, es seien nur 10% rot. Die Behauptung der Firma soll akzeptiert werden, wenn sich unter 20 Gummibärchen mindestens 3 rote befinden.

Lösung

① *Bestimme die Stichprobenlänge n und formuliere die Hypothesen*

$n = 20$

H_1: $p = 0{,}2$
H_2: $p = 0{,}1$

Man entscheidet sich für H_1, wenn die Anzahl der roten Gummibärchen in einem bestimmten Intervall liegt, dem Annahmebereich A_1 der Hypothese H_1. Analog verfährt man auch mit H_2. A_2 heißt auch Ablehnungsbereich von H_1.

② *Gib A_1 und A_2 an (in Aufg. vorgegeben)*

$n = 20$

H_1: $p = 0{,}2$ $\quad A_1 = \{3; 4; 5; \ldots; 20\}$
H_2: $p = 0{,}1$ $\quad A_2 = \{0; 1; 2\}$

Nun können zwei Fehler auftreten:

1. Man entscheidet sich für H_2, obwohl H_1 zutrifft (Fehler 1. Art).
2. Man entscheidet sich für H_1, obwohl H_2 zutrifft (Fehler 2. Art).

③ *Berechne nun die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Fehler (Irrtumswahrscheinlichkeiten)*

Fehler 1. Art: $P_{0,2}^{20}(Z \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} B(20;0{,}2;i) = \underline{\underline{20{,}6\%}}$

Fehler 2. Art: $P_{0,1}^{20}(Z \geq 3) = 1 - P_{0,1}^{20}(Z \leq 2) = 1 - \sum_{i=0}^{2} B(20;0{,}1;i) = 1 - 0{,}67693 = \underline{\underline{22{,}3\%}}$

§10 Signifikanztests

Problem

Es ist ein Maximalwert („Signifikanzniveau“) für den Fehler 1. Art vorgegeben, die Entscheidungsregel soll bestimmt werden.

Beispiel

Eine Firma behauptet, 20% der von ihr hergestellten Gummibärchen seien rot, während der Verbraucherschutz behauptet, es seien nur 10% rot. Es soll die Behauptung der Firma mit einer Stichprobe von 50 Gummibärchen getestet werden. Welche Entscheidungsregel ergibt sich auf dem Signifikanzniveau von 5%?

Lösung

① *Bestimme die Stichprobenlänge n und formuliere die Null-Hypothese*

n = 50

H_0: p = 0,2

② *Gib A (Annahmebereich von H_0) und $\overline{A}$ (Ablehnungsbereich von H_0) an (verwende k als Variable für den Bereich mit den kleineren Zahlen)*

n = 50

H_0: p = 0,2

$A = \{k+1; 4; 5; \ldots; 20\}$

$\overline{A} = \{0; 1; k\}$

Nun ergibt die Aufgabenstellung, dass der Fehler 1. Art höchstens 5% betragen soll

③ *Stelle einen Ansatz für den Fehler 1. Art auf:*

$P_{0,2}^{50}(Z \leq k) \leq 0{,}05$

$\sum_{i=0}^{k} B(50;0{,}2;i) \leq 0{,}05$

④ *Ermittle nun in der Tabelle den Wert für k, der diese Bedingung gerade noch erfüllt und formuliere die Entscheidungsregel in Worten:*

In der nebenstehenden Tabelle stellt man fest, dass

für k = 5 gilt: $\sum_{i=0}^{k} B(50;0{,}2;i) = 0{,}04803$

für k = 6 gilt: $\sum_{i=0}^{k} B(50;0{,}2;i) = 0{,}10340$

Damit ist die Bedingung für k = 5 gerade noch erfüllt.

n	k	p = 0,2	
		B(n;p;i)	$\sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$
50	0	0,00001	0,00001
	1	0,00018	0,00019
	2	0,00109	0,00129
	3	0,00437	0,00566
	4	0,01284	0,01850
	5	0,02953	0,04803
	6	0,05537	0,10340

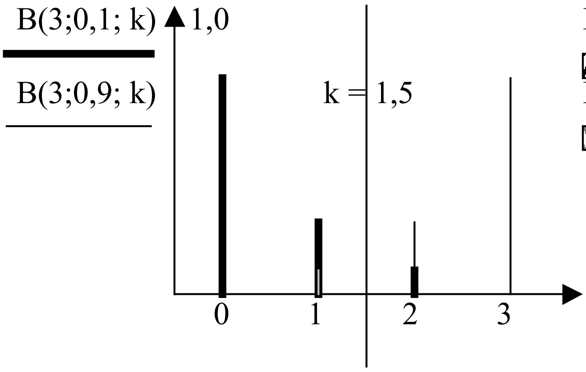
Entscheidung für H_0, wenn mehr als 5 rote Gummibärchen zu finden sind.

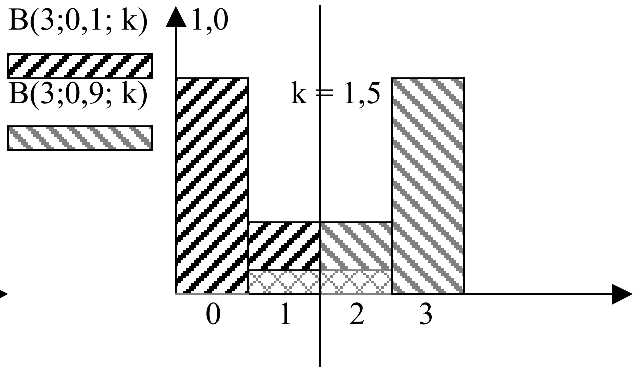
§11 Eigenschaften der Binomialverteilung

1. Graphische Darstellung

k	B(3;0,1; k)	B(3;0,9;k)
0	0,72900	0,00100
1	0,24300	0,02700
2	0,02700	0,24300
3	0,00100	0,72900

Stabdiagramm/Histogramm





Eigenschaften

- Die Verteilungen B(n;p) und B(n;1–p) sind zueinander symmetrisch bezüglich der Achse k = n/2
- B(n;0,5) ist in sich achsensymmetrisch bezüglich k = n/2
- Je größer n wird, desto breiter und niedriger wird die Verteilung. Das Maximum wandert dabei nach rechts.

2. Berechnung der wahrscheinlichsten Trefferzahl

Ist der Vorgänger kleiner als der Nachfolger, also B(n;p;k–1) < B(n;p;k), so verläuft der Graph von B(n;p) streng monoton wachsend und für den Bruch $X = \frac{B(n;p;k)}{B(n;p;k-1)}$ gilt : X > 1

Ist der Vorgänger größer als der Nachfolger, also B(n;p;k–1) > B(n;p;k), so verläuft der Graph von B(n;p) streng monoton fallend und für den Bruch $X = \frac{B(n;p;k)}{B(n;p;k-1)}$ gilt : X < 1

Sind zwei aufeinanderfolgende Werte der Binomialverteilung gleich groß, also B(n;p;k–1) = B(n;p;k), so gilt für den Bruch $X = \frac{B(n;p;k)}{B(n;p;k-1)}$: X = 1

$$X = \frac{B(n;p;k)}{B(n;p;k-1)} = \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{\binom{n}{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{\frac{1}{k \cdot 1} p \cdot 1}{\frac{1}{1(n-k+1)} \cdot 1 \cdot q} = \frac{(n-k+1)}{k} \cdot \frac{p}{q}$$

$$= \left(\frac{n+1}{k} - \frac{k}{k}\right)\frac{p}{q} = \frac{(n+1)p - kp}{kq} = \frac{(n+1)p - k(1-q)}{kq} = \frac{(n+1)p - k + kq}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p - k}{kq}$$

Falls $X < 1$(also $(n+1)p - k < 0$ oder $k < (n+1)p$), steigt der Graph

Falls $X > 1$(also $(n+1)p - k > 0$ oder $k > (n+1)p$), fällt der Graph

Falls $X = 1$(also $(n+1)p - k = 0$ oder $k = (n+1)p$),
sind an den Stellen $k = (n+1)p$ und $k = (n+1)p - 1$ benachbarte Maxima (nur wenn $(n+1)p$ ganzzahlig ist)
Ist $(n+1)p$ nicht ganzzahlig, so gibt es ein Maximum beim größten Wert von k unterhalb von $(n+1)p$

Beispiele:

Maximum von B(3;0,1):	$(n+1)\cdot p = (3+1)\cdot 0{,}1 = 0{,}4$;	also: Maximum bei $k = 0$
Maximum von B(3;0,9):	$(n+1)\cdot p = (3+1)\cdot 0{,}9 = 3{,}6$;	also: Maximum bei $k = 3$
Maximum von B(5;0,5):	$(n+1)\cdot p = (5+1)\cdot 0{,}5 = 3$;	also: Maxima bei $k = 3$ und $k = 2$

3. Anwendung auf den „zweiseitigen Test“

Zwei Produkte X und Y sollen auf ihre Beliebtheit untersucht werden. Mit einer Stichprobe von 100 Verbrauchern, die sich für eines der Produkte entscheiden sollen, wird die Hypothese „Beide Produkte sind gleich beliebt“ auf dem Niveau 5% getestet.

Also: H_o: $p = 0{,}5$ $A = \{50 - k; 50 - k + 1; ...; 50; …; 50 + k - 1; 50 + k\}$
H_1 : $p \neq 0{,}5$ $\overline{A} = \{0; 1; 2; ... ; 50 - k - 1; 50 + k + 1; ...; 100\}$

Als Annahmebereich wählt man den um das Maximum bei 50 symmetrischen Bereich
Der Ablehnungsbereich ist auf beiden Seiten des Annahmebereichs zu finden.

Berechnung von k wegen Symmetrie:

$2\,P(Z \leq 50 - k - 1) < 0{,}05$
$P(Z \leq 50 - k - 1) < 0{,}025$
$50 + k + 1 <$ ____ ; $k =$ ___; d. h. Entscheidung für H_o, falls die Anzahl der gekauften

Produkte X zwischen ____ und ____ liegt.

INHALTSVERZEICHNIS

